

Macroeconomia Avançada

Aula 3(c): A Economia Descentralizada – Modelo Básico de Equilíbrio Geral Dinâmico

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans (Tempo Contínuo)

Informativo

Essa nota de aula é um resumo dos principais tópicos constantes nas referências bibliográficas da disciplina Macroeconomia Avançada, lecionada no Programa de Doutorado e Mestrado em Economia do Instituto Brasileiro de Ensino, Desenvolvimento e Pesquisa (IDP).

Eu destaco que essa nota de aula não tem fins comerciais, servindo exclusivamente como material de apoio às aulas dessa disciplina.

Quaisquer erros e omissões são de minha inteira responsabilidade.

Contribuições e considerações podem ser enviadas para:

sergio.gadelha@idp.edu.br ou
professor.sergio.Gadelha@gmail.com

Restrição Orçamentária

- Ao contrário do problema do planejador central, as famílias não se defrontam com a **restrição de recursos da economia**, mas sim como a **restrição orçamentária**. Em t , essa restrição é dada por:

$$C_t + (\dot{K}_t + \delta K_t) + \dot{B}_t = w_t N_t + r_t K_t + R_t B_t$$

Em que B_t é o estoque de ativos financeiros da família (se negativo, trata-se de dívida).

- Lado direito são os recursos recebidos pela família em t :
 - ▶ Serviços de trabalho ($w_t N_t$), serviços de capital ($r_t K_t$) e juros recebidos sobre ativos ($R_t B_t$) (juros pagos se $B_t > 0$).
- Lado esquerdo indica que esses recursos podem ser divididos entre consumo e poupança.
 - ▶ Poupança pode acontecer como investimento em capital físico ($I_t = \dot{K}_t + \delta K_t$) ou aquisição de mais ativos financeiros ($\dot{B}_t$).

Restrição Orçamentária

- Em termos *per capita* (dividindo os dois lados acima por N_t):

$$c_t + \frac{\dot{K}_t}{N_t} + \delta k_t + \frac{\dot{B}_t}{N_t} = w_t + r_t k_t + R_t b_t$$

Em que $b_t \equiv B_t/N_t$. Sabe-se que $\dot{K}_t/N_t = \dot{k}_t + nk_t$.
Similarmente, $\dot{B}_t/N_t = \dot{b}_t + nb_t$. Portanto:

$$c_t + \dot{k}_t + \dot{b}_t = w_t + (r_t - \delta - n)k_t + (R_t - n)b_t \quad (3.1)$$

Restrição Orçamentária

- Se $(r_t - \delta) > R_t$, então o retorno do capital seria maior que o retorno do ativo financeiro.
 - ▶ Haveria oportunidades infinitas de arbitragem: os agentes econômicos teriam incentivos a se endividar sem limites, para investir em capital e aumentar suas possibilidades de consumo.
 - ▶ Todavia, os recursos da economia são limitados, indicando que essa situação não pode ser um equilíbrio.
- Se $(r_t - \delta) < R_t$, então o retorno do capital seria menor que o retorno do ativo financeiro.
 - ▶ Os agentes econômicos teriam incentivos a colocar toda a sua riqueza no ativo financeiro: o capital físico seria nulo.
 - ▶ Mas, nesse caso, a produtividade marginal do capital seria infinita, assim como o próprio retorno de investir no capital. Essa situação também não é um equilíbrio.

Restrição Orçamentária

- Logo, a única configuração consistente com equilíbrio é tal que os retornos dos dois ativos se igualam: $R_t = r_t - \delta$.
- O agente representativo está, portanto, indiferente em relação às diferentes formas de alocar sua riqueza entre os dois ativos (como eles têm o mesmo retorno, são substitutos perfeitos). Importa apenas o estoque total de ativos *per capita*, dado por:

$$a_t = b_t + k_t \quad (3.2)$$

- Assim, a restrição orçamentária (3.1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$c_t + \dot{a}_t = w_t + (R_t - n)a_t \quad (3.3)$$

Esquemas de Ponzi

- A restrição orçamentária anterior não previne esquemas de Ponzi, nos quais o indivíduo poderia aumentar sua dívida indefinidamente para elevar o consumo:
 - ▶ Em um dado período, toma-se dívida tanto para saldar os juros da dívida atual, como para elevar seu consumo; no período seguinte, toma-se uma quantidade ainda maior de dívida para pagar os juros, que agora cresceram, e expandir novamente o consumo.
- Esses esquemas de Ponzi não violam a restrição orçamentária (3.3) em nenhum ponto no tempo, mas:
 - ▶ esses esquemas não são factíveis, pois não há recursos suficientes na economia para sustentar essa elevação sem limite no consumo;
 - ▶ é necessário impor uma restrição adicional sobre as escolhas da família representativa, de modo a prevenir esquemas de Ponzi.

Esquemas de Ponzi

- Multiplique os dois lados da equação (3.3) por $e^{\left\{-\int_0^t (R_s - n) ds\right\}}$:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty c_t e^{\left\{-\int_0^t (R_s - n) ds\right\}} dt + \int_0^\infty [\dot{a}_t - (R_t - n)a_t] e^{\left\{-\int_0^t (R_s - n) ds\right\}} dt \\ &= \int_0^\infty w_t e^{\left\{-\int_0^t (R_s - n) ds\right\}} dt \end{aligned} \quad (3.4)$$

Esquemas de Ponzi

■ Note que:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ a_t e^{-\int_0^t (R_s - n) ds} \right\} \\ &= \dot{a}_t e^{-\int_0^t (R_s - n) ds} + a_t e^{-\int_0^t (R_s - n) ds} (-1)(R_t - n) \\ &= [\dot{a}_t - (R_t - n)a_t] e^{-\int_0^t (R_s - n) ds} \end{aligned}$$

■ Logo:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty [\dot{a}_t - (R_t - n)a_t] e^{-\int_0^t (R_s - n) ds} dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left\{ a_t e^{-\int_0^t (R_s - n) ds} \right\} dt \\ &= a_t e^{-\int_0^t (R_s - n) ds} \Big|_{t=0}^\infty \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} a_t e^{-\int_0^t (R_s - n) ds} - a_0 \quad (3.5) \end{aligned}$$

Condição de “No-Ponzi Game”

- Substituindo (3.5) em (3.4), tem-se que:

$$\int_0^{\infty} c_t e^{\left\{-\int_0^t (R_s - n) ds\right\}} dt = a_0 + \int_0^{\infty} w_t e^{\left\{-\int_0^t (R_s - n) ds\right\}} dt - \lim_{t \rightarrow \infty} a_t e^{-\int_0^t (R_s - n) ds} \quad (3.6)$$

► Lado direito: os dois primeiros termos são a riqueza do indivíduo ao longo de sua vida, que advém dos ativos iniciais (a_0) e do valor presente descontado da renda do trabalho (segundo termo).

► Lado esquerdo: valor presente do consumo, indicando como o indivíduo pode “gastar” sua riqueza, alocando-a ao longo dos diferentes períodos de sua vida.

- Mas, se o termo de limite fosse negativo, isso faria com que o indivíduo pudesse expandir o valor presente do seu consumo para além de sua riqueza. Isso ocorre nos esquemas de Ponzi.

Condição de “No-Ponzi Game”

$$\begin{aligned} & \overbrace{\int_0^\infty c_t e^{\left\{-\int_0^t (R_s - n) ds\right\}} dt}^{\text{consumo}} \\ &= \underbrace{\left\{ \underbrace{a_0}_{\substack{\text{ativos} \\ \text{iniciais}}} + \underbrace{\int_0^\infty w_t e^{\left\{-\int_0^t (R_s - n) ds\right\}} dt}_{\substack{\text{renda do} \\ \text{trabalho}}} \right\}}_{\text{riqueza}} - \lim_{t \rightarrow \infty} a_t e^{-\int_0^t (R_s - n) ds} \end{aligned}$$

Condição de “*No-Ponzi Game*”

- Visando prevenir esquemas de Ponzi, deve-se adotar a hipótese de que o termo limite seja não negativo. Trata-se da condição de “*No-Ponzi Game*” (NPG):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_t e^{-\int_0^t (R_s - n) ds} \geq 0$$

- A família representativa somente escolherá caminhos de consumo em que a expressão acima vale como igualdade.
- Se o limite fosse estritamente positivo, reduzi-lo aumentaria os recursos disponíveis para consumo ao longo da vida, possibilitando um aumento na utilidade.

Restrição Orçamentária Intertemporal

- Nesse caso, com o limite igual a zero, a equação (6) torna-se:

$$\underbrace{\int_0^{\infty} c_t e^{\left\{-\int_0^t (R_s - n) ds\right\}} dt}_{\text{consumo}} = a_0 + \underbrace{\int_0^{\infty} w_t e^{\left\{-\int_0^t (R_s - n) ds\right\}} dt}_{\text{riqueza}}$$

- Esta é a **restrição orçamentária intertemporal**, que nos diz que o **valor presente do consumo ao longo da vida** da família representativa deve ser igual ao valor de sua **riqueza**.

► essa restrição é composta pelos **ativos em $t = 0$** , e pelo **valor da força de trabalho da família representativa**, dada pelo valor presente da renda do trabalho ao longo da vida.

Problema da família representativa

■ Essa família escolhe as trajetórias de consumo e ativos - $\{c_t\}_{t \in [0, \infty)}$ e $\{a_t\}_{t \in (0, \infty)}$ - de modo a maximizar sua utilidade ao longo da vida, tomando como dados:

- ▶ A restrição orçamentária (3.3) em todos os períodos $t \geq 0$;
- ▶ O estoque inicial de ativos (a_0)
- ▶ A sequência de preços $\{w_t, r_t, R_t\}_{t \in [0, \infty)}$
- ▶ A restrição (condição) de “*No-Ponzi Games*”.

Problema da família representativa

- A família representativa é pequena o suficiente para não afetar preços. Entretanto, toma decisão com base em preços futuros, de mercados que ainda não estão abertos no presente.

- ▶ Expectativas racionais: os agentes econômicos entendem como a economia funciona (têm o modelo "na cabeça"), e são capazes de fazer a melhor previsão possível sobre essas variáveis no futuro.

- ▶ Como não existe incerteza, os agentes econômicos sabem exatamente como serão esses preços no futuro.

Problema da família representativa

- O problema da família representativa é, portanto:

$$\max U_0 = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t) dt$$

Sujeito a:

$$\dot{a}_t = w_t + (R_t - n)a_t - c_t, \forall t \geq 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_t e^{-\int_0^t (R_s - n) ds} \geq 0$$

$$a_0, \{w_t, r_t, R_t\}_{t \in [0, \infty)} \text{ dados}$$

Lembrando que $R_t = r_t - \delta$ em equilíbrio. No problema acima, tem-se variável de controle (c) e variável de estado (a). O Hamiltoniano é dado por:

$$H_t = e^{-\rho t} u(c_t) + \mu_t [w_t + (R_t - n)a_t - c_t]$$

Condições de Ótimo

- As condições de ótimo são, portanto:

$$H_c = 0 \Rightarrow e^{-\rho t} u(c_t) - \mu_t = 0 \quad (3.7)$$

$$H_a = -\dot{\mu}_t \Rightarrow \mu_t(r_t - \delta - n) = -\dot{\mu}_t \quad (3.8)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t a_t = 0 \quad (3.9)$$

Da equação (3.7), segue que:

$$\frac{\dot{\mu}_t}{\mu_t} = -\rho + \left[\frac{u''(c_t)}{u'(c_t)} \right] \dot{c}_t$$

Condições de Ótimo

- Substituindo em (3.8), tem-se que:

$$\frac{\dot{\mu}_t}{\mu_t} = r_t - \delta - n = \rho - \left[\frac{u''(c_t)}{u'(c_t)} \right] \dot{c}_t$$

Equação de Euler:

$$\rho - \left[\frac{u''(c_t)}{u'(c_t)} \right] \dot{c}_t = r_t - (\delta + n) \quad (3.10)$$

Equação de Euler

Lado esquerdo	Lado direito
$\rho - \left[\frac{u''(c_t)}{u'(c_t)} \right] \dot{c}_t$	$r_t - (\delta + n)$
Trata-se do custo marginal de poupar uma unidade adicional, que é dado pelo custo da espera por consumir, e pelo fato de que o consumo se torna viável no tempo por conta disso.	Trata-se do benefício marginal, expresso em termos de retorno para a família.
	Ao poupar uma unidade a mais, a família expande seu capital ao longo do tempo, o qual pode ser alugado às firmas.
	O benefício dessa ação é dado pela taxa de aluguel do capital, líquida da depreciação (tanto depreciação física, como advinda do crescimento populacional)

Condição de Transversalidade

- Substituindo (3.7) em (3.9), pode-se obter a condição de transversalidade da família representativa:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} u(c_t) a_t = 0 \quad (3.11)$$

- A equação (3.11) diz que o valor dos ativos (em unidades de utilidade do consumo), quando $t \rightarrow \infty$, trazido a valor presente, deve ser igual a zero.

Problema da Firma Representativa

- Na economia descentralizada, o produto é gerado por firmas, atuando em **competição perfeita**.
 - ▶ Todas as firmas são idênticas.
 - ▶ Contratam capital e trabalho das famílias, de forma a maximizar seus lucros.
 - ▶ Como há **retornos constantes de escala e concorrência perfeita**, o **lucro das firmas será igual a zero**.
- Por conta da hipótese de retornos constantes de escala, o número de firmas é irrelevante para o agregado.
 - ▶ Logo, por simplicidade, supõe-se que há apenas uma firma representativa (ou, de maneira equivalente, que há medida 1 de firmas idênticas).

Problema da Firma Representativa

- O problema da firma representativa é estático:
 - ▶ Ações e resultados passados (isto é, quantidade de insumos contratados, produto, lucro etc.) não afetam o lucro corrente.
 - ▶ Logo, maximizar o lucro ao longo do tempo (em valor presente) é equivalente a maximizar o lucro em cada instante separadamente.

Problema da Firma Representativa

- O problema da firma representativa então consiste em escolher as quantidades de capital (K_t^d) e trabalho (N_t^d) a serem contratadas em t , de modo a maximizar seu lucro no próprio período t , tomando-se como dados os preços dos insumos (r_t e w_t):

$$\max_{\{K_t^d, N_t^d\}} \{F(K_t^d, N_t^d) - w_t N_t^d - r_t K_t^d\}$$

w_t, r_t dados

- As condições de primeira ordem implicam que:

$$F_K(K_t^d, N_t^d) = r_t$$

$$F_N(K_t^d, N_t^d) = w_t$$

Em outras palavras, a firma iguala o produto marginal de cada insumo a seu preço.

Problema da Firma Representativa

- Pode-se reescrever as condições de primeira ordem em termos *per capita* (deve-se omitir índices de tempo e o sobrescrito d por um momento). Primeiro, note que, por causa dos retornos constantes de escala:

$$F(K, N) = NF\left(\frac{K}{N}, 1\right) = Nf\left(\frac{K}{N}\right)$$

- Os produtos marginais são, então:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = Nf'\left(\frac{K}{N}\right)\frac{1}{N} = f'(k)$$

$$\frac{\partial F}{\partial N} = f\left(\frac{K}{N}\right) + Nf'\left(\frac{K}{N}\right)\left(-\frac{K}{N^2}\right) = f(k) - kf'(k)$$

Problema da Firma Representativa

- Assim, as condições de ótimo da firma representativa podem ser expressas da seguinte forma:

$$f'(k_t^d) = r_t \quad (3.12)$$

$$f(k_t^d) - k_t^d f'(k_t^d) = w_t \quad (3.13)$$

Em que $k_t^d = K_t^d / N_t^d$

Equilíbrio Competitivo

- Nesta economia, os mercados estão em equilíbrio em todos os instantes $t \geq 0$.
- O equilíbrio é tal que:
 - ▶ Dados os preços, todos os agentes estão otimizando (tanto a família representativa, quanto a firma representativa).
 - ▶ As decisões da família representativa e da firma representativa são consistentes no agregado, isto é, oferta igual a demanda para todos os mercados, e em todo o tempo $t \geq 0$.
- Atenção: aqui, os conceitos de estado estacionário e equilíbrio são distintos:
 - ▶ os mercados estão em equilíbrio em todo t , inclusive quando a economia está transitando para o estado estacionário.
 - ▶ trata-se, portanto, de uma **trajetória de equilíbrio**.

Equilíbrio Competitivo

- Um **equilíbrio competitivo** é dado por:
 - ▶ Uma sequência de preços $\{w_t, r_t, R_t\}_{t \in [0, \infty)}$
 - ▶ Uma sequência de alocações $\{c_t, k_t^d\}_{t \in [0, \infty)}^\infty$ e $\{k_t, b_t\}_{t \in [0, \infty)}$

Tais que:

- Dada a sequência de preços $\{w_t, r_t, R_t\}_{t \in [0, \infty)}$ e os estoques iniciais de ativos $k_0 > 0$ e $b_0 = 0$, as sequências $\{c_t\}_{t \in [0, \infty)}$ e $\{k_t, b_t\}_{t \in [0, \infty)}$ resolvem o problema da família representativa.
- Dada a sequência de preços $\{w_t, r_t\}_{t \in [0, \infty)}$, a sequência $\{k_t^d\}_{t \in [0, \infty)}^\infty$ resolve o problema da firma representativa.

Equilíbrio Competitivo

- Os mercados estão em equilíbrio (*market clearing*) em todo $t \geq 0$. Ou seja, para todo $t \geq 0$:

$$k_t = k_t^d \quad (3.14)$$

$$b_t = 0 \quad (3.15)$$

$$c_t + \dot{k}_t - (\delta + n)k_t = f(k_t) \quad (3.16)$$

Equilíbrio Competitivo

- A equação (3.14) indica que a oferta de capital por parte das famílias é igual da demanda de capital por parte das famílias.
- A equação (3.15) é a condição de equilíbrio no mercado do ativo financeiro:
 - ▶ b_t tem que ser zero porque os agentes são idênticos nessa economia.
 - ▶ Se um deles desejasse emprestar recursos, então todos fariam o mesmo, e não haveria ninguém para tomar emprestado. Isso não pode ser um equilíbrio.
 - ▶ Analogamente, se um agente quisesse tomar emprestado, então todos os outros fariam o mesmo, e não haveria ninguém disposto a emprestar recursos. Também não é um equilíbrio.
- Logo, os preços deve ser tais que o agente representativo não esteja disposto a emprestar ou tomar emprestado nessa economia, isto é, $b_t = 0$ para todo $t \geq 0$.

Equilíbrio Competitivo

- Da equação (2), segue que:

$$a_t = b_t + k_t = k_t \quad (3.17)$$

- Por fim, a equação (3.16) é a própria restrição de recursos dessa economia.

► Essa equação (3.16) é também a condição de equilíbrio no mercado de produto (isto é, mercado de bens e serviços), sendo a demanda por parte das famílias (para consumo e investimento) expressa no lado esquerdo da equação, ao passo que a oferta por parte das firmas sendo expressa no lado direito.

Equilíbrio Competitivo

- Como a solução de mercado e a solução do planejador central se comparam? Neste modelo de Ramsey-Cass-Koopmans, considerando economia descentralizada, essas duas soluções são coincidentes.
- Trata-se de uma aplicação do Primeiro Teorema do Bem-Estar Econômico-Social:
 - ▶ Dado que não há falhas de mercado (por exemplo, monopólios, oligopólios, externalidades, assimetria de informações, bens públicos etc.), a solução de mercado será eficiente.
 - ▶ A trajetória de equilíbrio é, portanto, idêntica à trajetória que resultado do problema do planejador central.

Eficiência

- Para ver isso, combine a equação de Euler da família representativa (equação 3.10) e a condição de primeira ordem da firma representativa (equação 3.12), levando-se em conta que, em equilíbrio, $k_t = k_t^d$, para obter:

$$\rho - \left[\frac{u''(c_t)}{u'(c_t)} \right] \dot{c}_t = f'(k_t) - (\delta + n), \forall t \geq 0 \quad (3.18)$$

Eficiência

- Além disso, da condição de transversalidade do problema da família representativa (equação 3.11), junto com a condição de equilíbrio $a_t = k_t$, tem-se que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} u(c_t) k_t = 0 \quad (3.19)$$

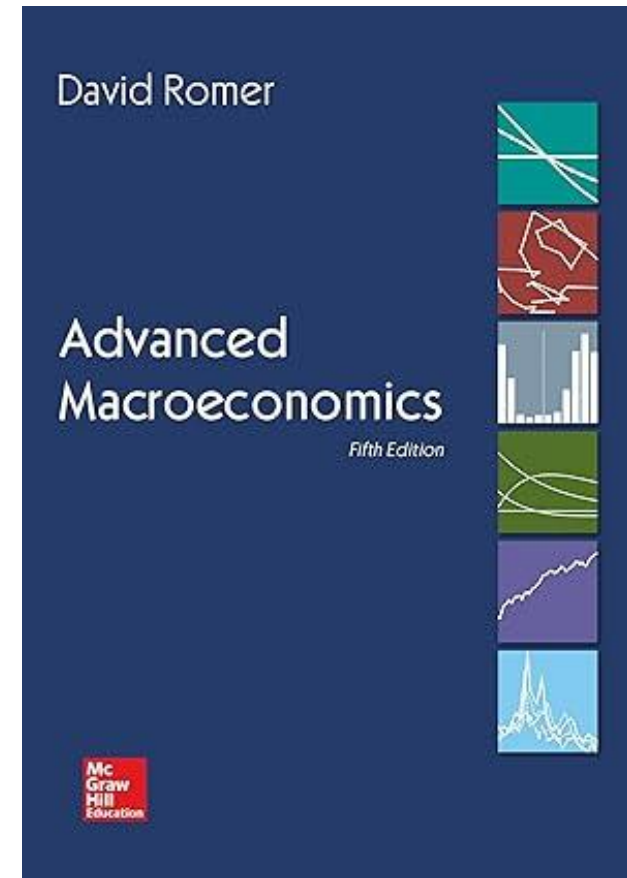
- Lembrando que, em equilíbrio, a restrição de recursos é válida:

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (\delta + n)k_t, \forall t \geq 0 \quad (3.20)$$

Eficiência

- As equações (3.18), (3.19) e (3.20) coincidem com as equações que caracterizam a solução do problema do planejador central:
 - ▶ Logo, a trajetória de equilíbrio coincide com a solução do problema do planejador central.
 - ▶ O equilíbrio competitivo é eficiente.

Referências bibliográficas



Capítulo 1

Referências bibliográficas

COSTA FILHO. J. R. **Macroeconomia Dinâmica**. Curso de Capacitação. Brasília, 2024.

JEHLE, G. A.; RENY, P. J. **Advanced Microeconomic Theory**, Third Edition. Essex: Pearson Education Limited, 2011.

KAMIHIGASHI, T. **Transversality conditions and dynamical economic behavior**. In: The New Palgrave Dictionary of Economics, Second Edition, 2006.

RODRIGUES, M. **Curso de Teoria Macroeconômica**. Universidade de São Paulo, 2021.

SHILLER, R. J. Unlearned lessons from the housing bubble. **The Economists' Voice**, v. 6, n. 7, 2009.

Obrigado!

Contato:

PROF. DR. SÉRGIO RICARDO DE BRITO GADELHA

E-mail: sergio.gadelha@idp.edu.br e professor.sergio.Gadelha@gmail.com

Sítio eletrônico: <https://sergiorbgadelha.com.br/>