

Macroeconomia Avançada

Aula 3(a): A Economia Descentralizada – Modelo Básico de Equilíbrio Geral Dinâmico

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans (Tempo Discreto)

Informativo

Essa nota de aula é um resumo dos principais tópicos constantes nas referências bibliográficas da disciplina Macroeconomia Avançada, lecionada no Programa de Doutorado e Mestrado em Economia do Instituto Brasileiro de Ensino, Desenvolvimento e Pesquisa (IDP).

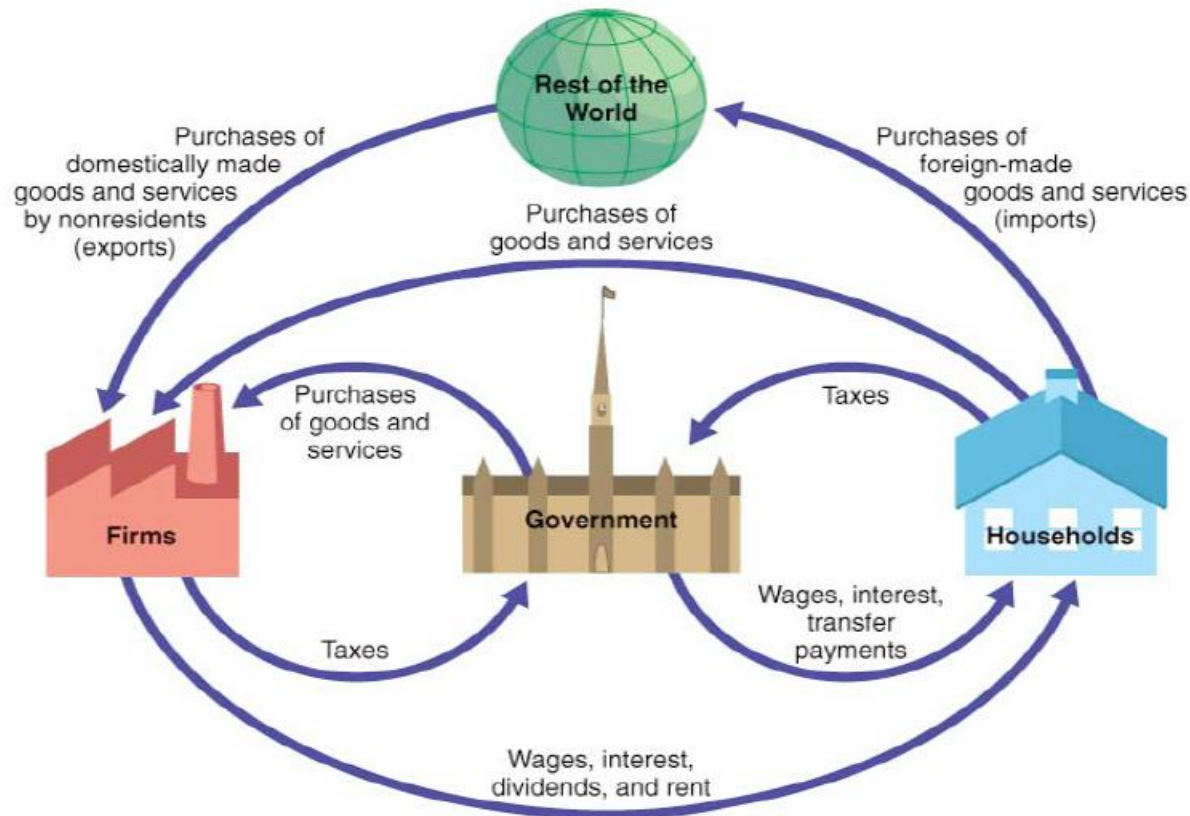
Eu destaco que essa nota de aula não tem fins comerciais, servindo exclusivamente como material de apoio às aulas dessa disciplina.

Quaisquer erros e omissões são de minha inteira responsabilidade.

Contribuições e considerações podem ser enviadas para:

sergio.gadelha@idp.edu.br ou
professor.sergio.gadelha@gmail.com

Os tomadores de decisões



Em vez de um planejador social benevolente tomar todas as decisões, um modelo mais realista envolve famílias e empresas a tomarem as suas próprias decisões com objetivos diferentes.

1. Dinâmica do Consumo

2. Dinâmica do Trabalho

1.1 Mercados e Agentes

Mercados e Agentes

- No Modelo de RCK, havia apenas um agente econômico (“**planejador social benevolente**”) realizando todas as decisões da economia: consumo, lazer, trabalho investimento e acúmulo de capital. Discutiu-se a solução do modelo de forma centralizada:

- ▶ Planejador central decide diretamente as trajetórias de consumo e investimento.

- ▶ Maximizar a utilidade do agente representativo, dado que as alocações são factíveis em cada ponto no tempo $t \geq 0$, isto é, respeitando-se a **restrição de recursos**.

- Alternativa: introduzir famílias e empresas que interagem em mercados.

- ▶ **Famílias**: tomam decisões de consumo, são proprietárias das empresas, ofertam trabalho e poupam em ativos financeiros.

- ▶ **Empresas**: produzem, investem, demandam trabalho, tomam emprestado a poupança das famílias, pagam salários e distribuem lucros.

Descentralização

- Agora, será realizada a solução descentralizada do modelo de Ramsey-Cass-Koopmans:
 - ▶ **Decisões de consumo e poupança** são tomadas pela **família representativa**, com base em preços.
 - ▶ **Decisões de produção** são tomadas pela **firma representativa**, também com base em preços.
 - ▶ A família representativa é dona dos fatores de produção (capital e trabalho), e presta serviços desses fatores à firma representativa.
 - ▶ Equilíbrio competitivo: cada agente econômico realiza sua decisão, tomando-se preços como dados; em equilíbrio, as decisões da família representativa e da firma representativa são consistentes (isto é, os mercados estão em equilíbrio em todo o tempo $t \geq 0$).

Mercados

Mercado do Produto

(ou Mercado de Bens e Serviços):

- ▶ ofertado pela firma representativa, e demandado pela família representativa para ser utilizado como consumo ou investimento.
- ▶ Preço do produto final é normalizado em 1 (numerário da economia).

Mercado de Trabalho:

- ▶ Serviços de trabalho são ofertados pelas famílias, e contratados pelas firmas.
- ▶ O preço é o salário w_t .

Em cada ponto do tempo (t), há quatro mercados abertos

Mercado de Crédito:

- ▶ Família representativa pode emprestar ou tomar emprestado entre si à taxa de juros (R_t).

Mercado de Capital:

- ▶ Família representativa aluga seu capital para a firma representativa, que utiliza no processo de produção.
- ▶ O preço é a taxa de aluguel do capital (r_t).

Decisões intertemporais sobre o consumo

- A família representativa maximiza o valor presente da utilidade:

$$\underbrace{\max}_{\{c_{t+s}, a_{t+s}\}} V_t = \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s U(c_{t+s}) \quad (1.1)$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\underbrace{\Delta a_{t+1} + c_t}_{\text{destino dos recursos}} = \underbrace{x_t + r_t a_t}_{\text{renda}} \quad (1.2)$$

$$\beta = 1/(1 + \theta)$$

Com $U'_t > 0$, $U''_t < 0$, $0 < \beta < 1$. O termo a_t representa o estoque líquido de ativos financeiros (ativos) no começo do período t , que têm taxa de retorno (juros) r_t ; e x_t é a renda (exógena, por enquanto).

Decisões intertemporais sobre o consumo

- Note que no período t , as famílias escolhem $\{c_t, a_{t+1}\}$, ou seja, a_t é dado.
- Em $t + 1$, as famílias escolhem $\{c_{t+1}, a_{t+2}\}$ e assim por diante.
- Note que (i) isso é equivalente à escolha de todo caminho do consumo ao longo do tempo $\{c_t, c_{t+1}, c_{t+2}, \dots\}$; e (ii) em relação ao modelo anterior, troca-se a escolha sobre o estoque de capital pela escolha de ativos financeiros, introduz a taxa de juros e coloca-se a restrição orçamentária das famílias (e não mais a restrição orçamentária da economia como um todo!).

Otimização: Função Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \sum_{s=0}^{\infty} \{ \beta^s U(c_{t+s}) + \lambda_{t+s} [x_{t+s} + (1 + r_{t+s})a_{t+s} - c_{t+s} - a_{t+s+1}] \} \quad (1.3)$$

Condições de Primeira Ordem (CPO):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{t+s}} = \beta^s U(c_{t+s}) - \lambda_{t+s} = 0, \quad s \geq 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{t+s}} = \lambda_{t+s}(1 + r_{t+s}) - \lambda_{t+s-1} = 0, \quad s \geq 1 \quad (1.5)$$

E a restrição orçamentária (1.2).

Otimização: Função Lagrangeana

Resolvendo as condições de primeira ordem, para $s = 1$, tem-se a seguinte expressão da equação de Euler:

$$\frac{\beta U'(c_{t+1})}{U'(c_t)} (1 + r_{t+1}) = 1 \quad (1.6)$$

1.2 Interpretando a Equação de Euler

Equação de Euler: problema em dois períodos

$$V_t = U(c_t) + \beta U(c_{t+1}) \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} 0 &= dV_t = dU_t + \beta dU_{t+1} \\ &= U'(c_t)dc_t + \beta U'(c_{t+1})dc_{t+1} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$U'(c_t)dc_t + \beta U'(c_{t+1})dc_{t+1} = 0$$

$$\beta U'(c_{t+1})dc_{t+1} = -U'(c_t)dc_t$$

$$dc_{t+1} = -\frac{U'(c_t)}{\beta U'(c_{t+1})}dc_t \quad (1.9)$$

Equação de Euler: problema em dois períodos

Da equação (1.6), sabe-se que:

$$\frac{\beta U'(c_{t+1})}{U'(c_t)} (1 + r_{t+1}) = 1 \Leftrightarrow \frac{U'(c_t)}{\beta U'(c_{t+1})} = (1 + r_{t+1})$$

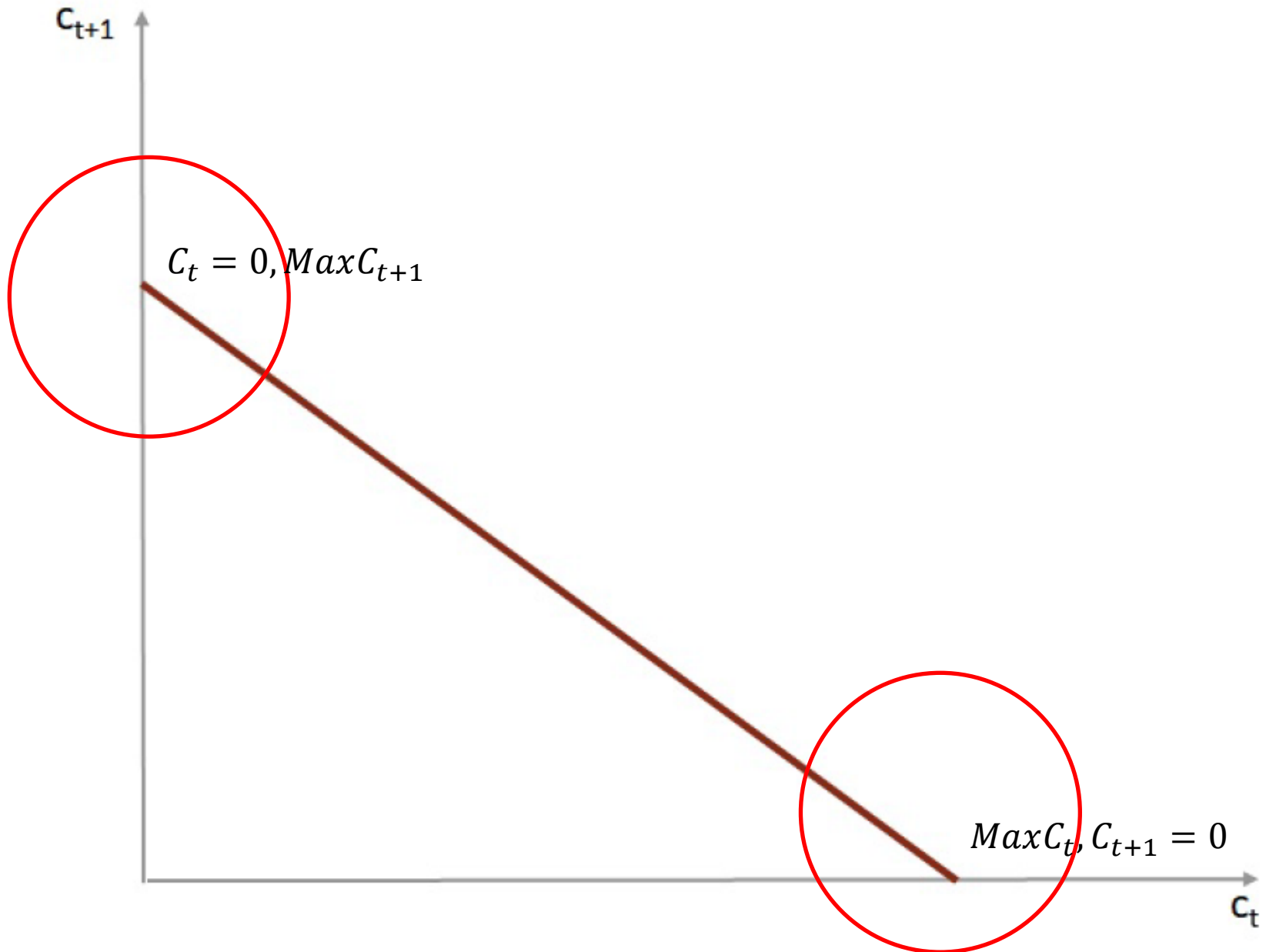
Substituindo a expressão acima em (1.9), nos teremos:

$$dc_{t+1} = -(1 + r_{t+1})dc_t \Leftrightarrow -\frac{dc_{t+1}}{dc_t} = 1 + r_{t+1} \quad (1.10)$$

$$\downarrow (dc_{t+1}) = -(1 + r_{t+1}) \uparrow (dc_t)$$

$$\uparrow (dc_{t+1}) = -(1 + r_{t+1}) \downarrow (dc_t)$$

Equação de Euler: problema em dois períodos



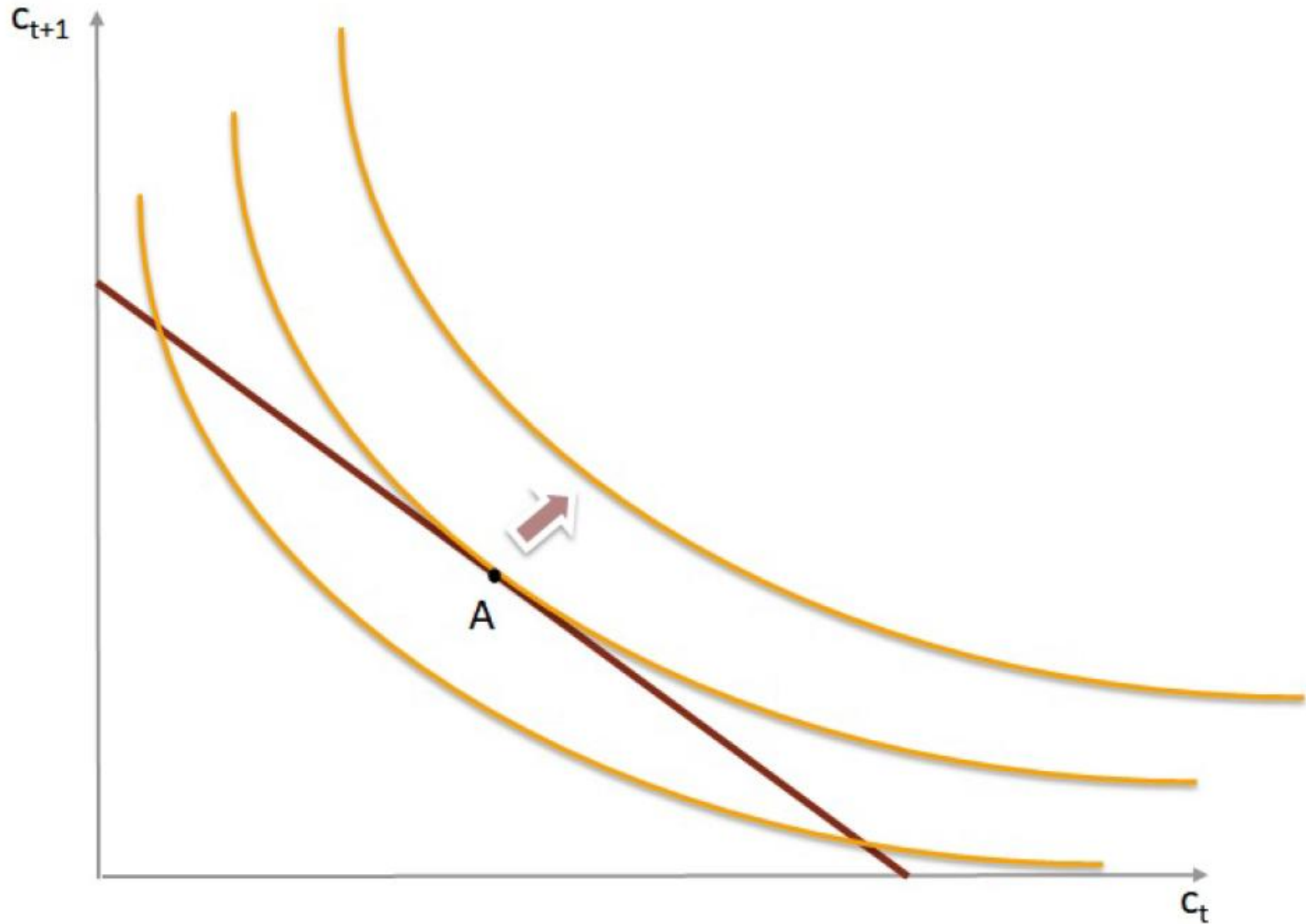
Equação de Euler: problema em dois períodos

- Considere a existência de uma taxa de retorno constante (r);
- Para encontrar onde a restrição orçamentária toca os dois eixos, deve-se perceber que o maior valor de c_t ocorre quando $c_{t+1} = 0$;
- Analogamente, o maior valor de c_{t+1} ocorre quando $c_t = 0$. Logo:

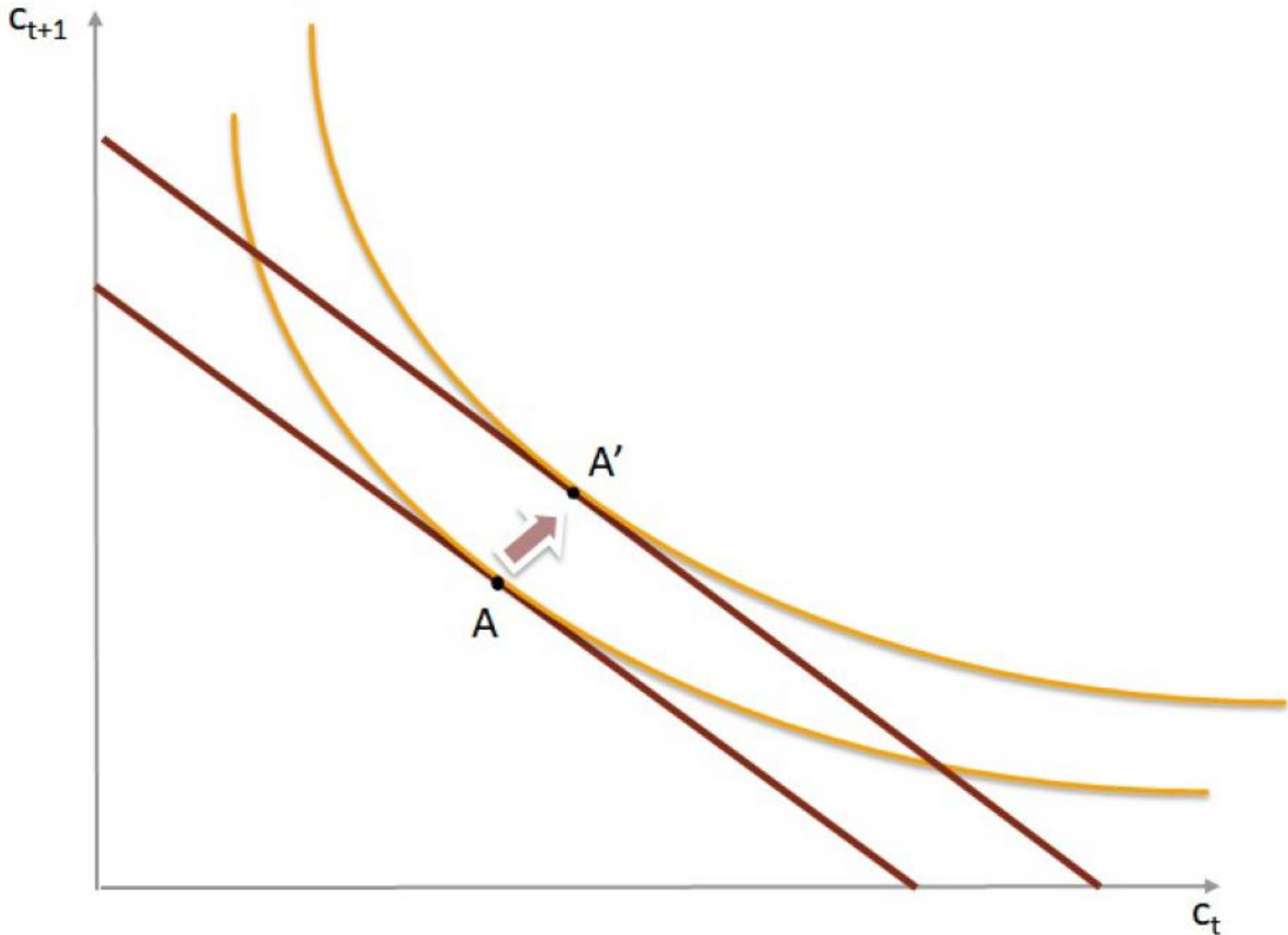
$$\max c_t = x_t + \frac{x_{t+1}}{1+r} + (1+r)a_t \quad (1.11)$$

$$\max c_{t+1} = (1+r)x_t + x_{t+1} + (1+r)^2 a_t$$

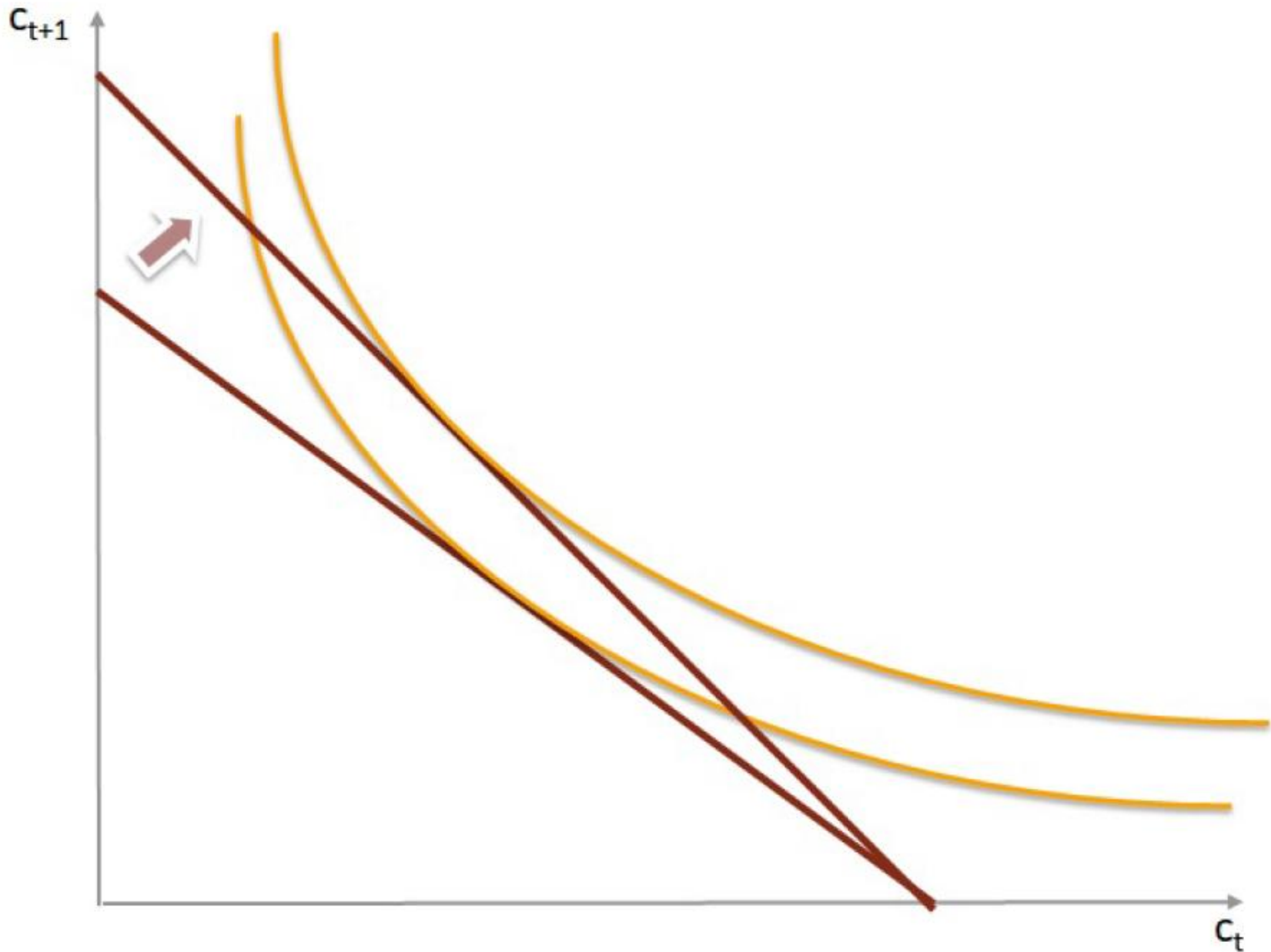
Equação de Euler: problema em dois períodos



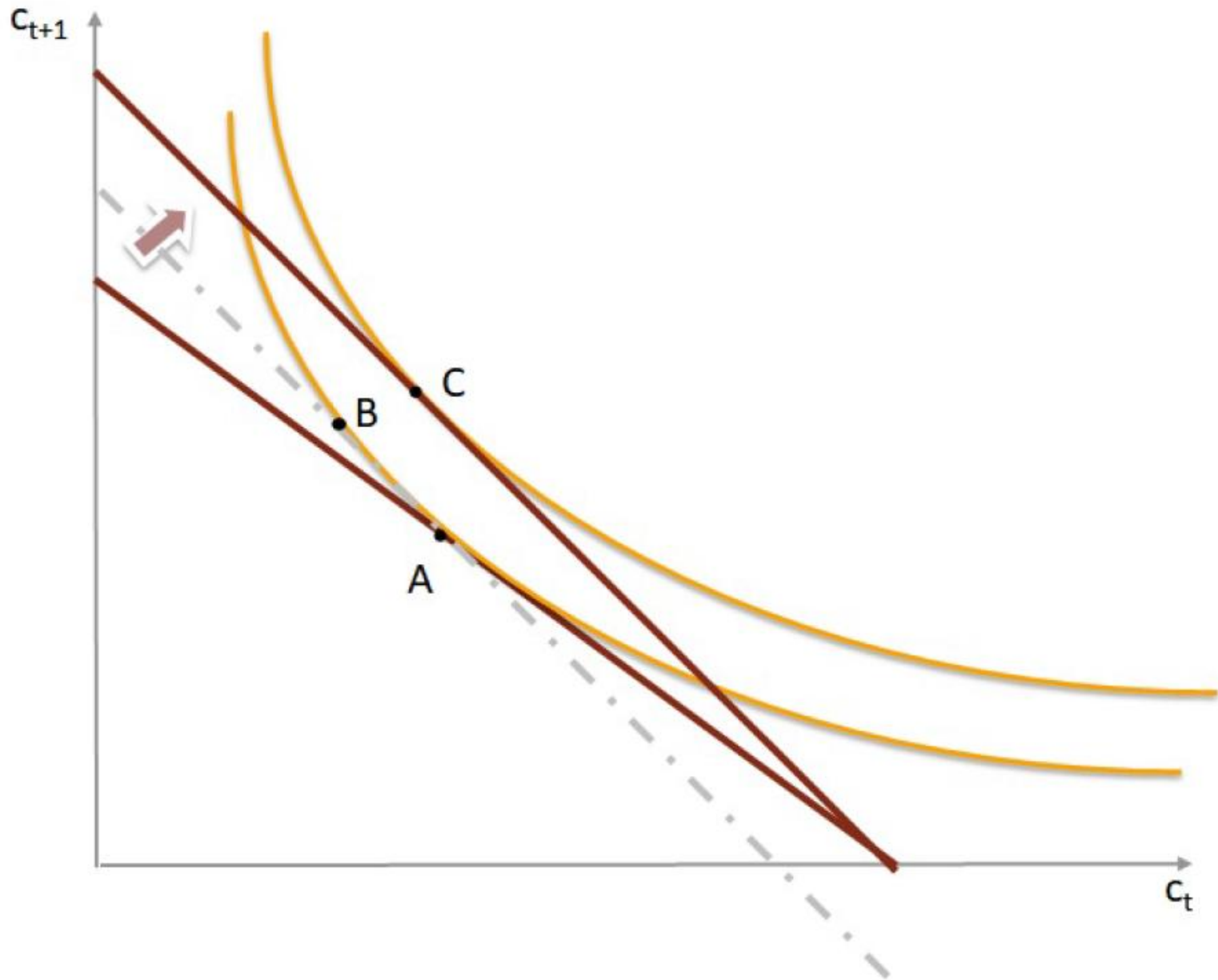
Equação de Euler: problema em dois períodos



Equação de Euler: aumento da taxa de juros



Equação de Euler: aumento da taxa de juros



Equação de Euler: aumento da taxa de juros

Efeito Substituição

- Ponto A $\rightarrow$ Ponto B
- Troca-se consumo hoje por consumo amanhã.

Efeito Renda

- Ponto B $\rightarrow$ Ponto C
- Maior juros, maior consumo amanhã, pode-se não consumir “tanto assim” amanhã.

Substituição intertemporal

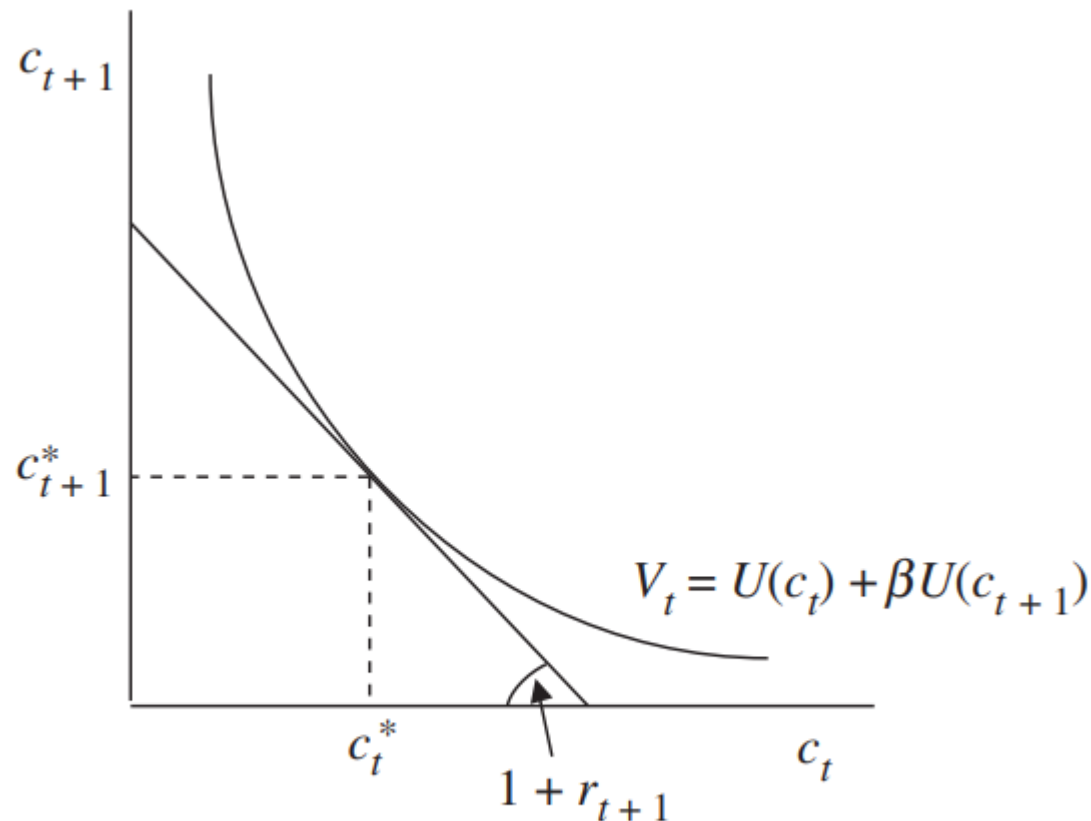


Figure 4.1. Two-period solution.

A equação de Euler tem o significado usual de que prescreve a substituição intertemporal do consumo entre dois períodos consecutivos.

1.3 Restrição Orçamentária Intertemporal

Restrição Orçamentária Intertemporal

- As restrições para os períodos t , $t + 1$ e $t + 2$ são, respectivamente:

$$t: a_{t+1} + c_t = x_t + (1 + r_t)a_t \quad (1.12)$$

$$t + 1: a_{t+2} + c_{t+1} = x_{t+1} + (1 + r_{t+1})a_{t+1} \quad (1.13)$$

$$t + 2: a_{t+3} + c_{t+2} = x_{t+2} + (1 + r_{t+2})a_{t+2} \quad (1.14)$$

Combinando (1.12) e (1.13), tem-se que:

$$\begin{aligned} & a_{t+2} + c_{t+1} + (1 + r_{t+1})c_t \\ &= x_{t+1} + (1 + r_{t+1})x_t + (1 + r_{t+1})(1 + r_t)a_t \end{aligned} \quad (1.15)$$

Restrição Orçamentária Intertemporal

- A equação (1.15) pode ser reescrita dividindo todos os membros por $(1 + r_{t+1})$, de tal modo que:

$$\begin{aligned} & \frac{a_{t+2}}{1 + r_{t+1}} + \frac{c_{t+1}}{1 + r_{t+1}} + c_t \\ &= \frac{x_{t+1}}{1 + r_{t+1}} + x_t + (1 + r_t)a_t \quad (1.16) \end{aligned}$$

O lado esquerdo da equação é o valor presente dos gastos totais em consumo e investimento. O lado direito é o valor presente das rendas totais.

- Pode-se reescrever a equação (1.14) dividindo todos os membros por $(1 + r_{t+2})$, de tal modo que:

$$\frac{a_{t+3}}{1 + r_{t+2}} + \frac{c_{t+2}}{1 + r_{t+2}} = \frac{x_{t+2}}{1 + r_{t+2}} + a_{t+2} \quad (1.17)$$

Restrição Orçamentária Intertemporal

- Ao substituir (1.17) em (1.16), tem-se que:

$$\begin{aligned} & \frac{a_{t+3}}{(1+r_{t+2})(1+r_{t+1})} + \frac{c_{t+2}}{(1+r_{t+2})(1+r_{t+1})} + \frac{c_{t+1}}{(1+r_{t+1})} + c_t \\ &= \frac{x_{t+2}}{(1+r_{t+2})(1+r_{t+1})} + \frac{x_{t+1}}{(1+r_{t+1})} + x_t + (1+r_t)a_t \quad (1.18) \end{aligned}$$

Restrição Orçamentária Intertemporal

- Substituindo recursivamente $\{a_{t+3}, a_{t+4}, \dots\}$ em (1.18), tem-se que o valor presente dos gastos totais será:

$$W_t = \frac{a_{t+n}}{\prod_{s=1}^{n-1} (1 + r_{t+s})} + \sum_{s=1}^{n-1} \frac{c_{t+s}}{\prod_{s=1}^{n-1} (1 + r_{t+s})} + c_t \quad (1.19a)$$

- O valor presente da riqueza total será:

$$W_t = \sum_{s=1}^{n-1} \frac{x_{t+s}}{\prod_{s=1}^{n-1} (1 + r_{t+s})} + x_t + (1 + r_t)a_t \quad (1.19b)$$

Extensões para $n - 1$ período

- Assumindo-se uma taxa de juros constante (r), com $n \rightarrow \infty$, como $(1 + r)^{n-1}$ cresce mais rápido que a_{t+n} , tem-se a seguinte **restrição orçamentária de horizonte infinito**:

$$W_t = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{c_{t+s}}{(1+r)^s} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x_{t+s}}{(1+r)^s} + (1+r_t)a_t \quad (1.20)$$

Em que W_t é o valor presente da renda vitalícia da família e é frequentemente chamado de **renda permanente**.

A equação (1.20) pode ser usada como restrição orçamentária alternativa única no problema de otimização.

Condição de Transversalidade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta^n a_{t+n} U'(c_{t+n}) = 0 \quad (1.21)$$

Isto garante que o valor terminal do ativo não tenha utilidade. Em particular, a família não pode financiar o consumo extra indefinidamente através de empréstimos ($a_t < 0$).

Por essa razão, a equação (1.21) é conhecida por condição de “*non-Ponzi-Game*” (Kamihigashi, 2006).

Condição de Transversalidade

E como $U'(c_{t+n}) > 0$, tem-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta^n a_{t+n} \quad (1.22)$$

Tem-se também que:

$$\beta^n = \frac{1}{\prod_{s=1}^{n-1} (1 + r_{t+s})} \quad (1.23)$$

Condição de Transversalidade

Pode-se reescrever a condição de “*non-Ponzi-Game*”:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{t+n}}{\prod_{s=1}^{n-1} (1 + r_{t+s})} \geq 0 \quad (1.24)$$

$\prod_{s=1}^{n-1} (1 + r_{t+s})$ é o fator de capitalização de juros entre t e $t+n$.

$a_{t+n} / \prod_{s=1}^{n-1} (1 + r_{t+s})$ é o valor presente do estoque de ativos a_{t+n} trazidos a valor presente.

1.4 Função Consumo

O que afeta o consumo das famílias?

Faça uma aproximação de Taylor de primeira ordem de $U'(c_{t+1})$ sobre c_t na equação de Euler (1.6):

$$\begin{aligned}\frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)} &\cong \frac{U'(c_t) + U''(c_t)(c_{t+1} - c_t)}{U'(c_t)} \\ &= 1 + \frac{U''(c_t)}{U'(c_t)} \Delta c_{t+1} = 1 - \sigma \left(\frac{\Delta c_{t+1}}{c_t} \right)\end{aligned}\quad (1.25)$$

Em que $\sigma = -cU''/U$ é o coeficiente de aversão relativa ao risco (ver [Jehley e Reny, 2011, p. 123](#)).

Trajetória do consumo ótimo

Portanto, ao se usar a aproximação da equação de Euler, tem-se:

$$\frac{\Delta c_{t+1}}{c_t} = \frac{1}{\sigma} \left[1 - \frac{1}{\beta(1 + r_{t+1})} \right]$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta c_{t+1}}{c_t} = \frac{r_{t+1} - \theta}{\sigma(1 + r_{t+1})} \quad (1.26)$$

- Se $r_{t+1} = \theta \Rightarrow \Delta c_{t+1}/c_t = 0$. O crescimento do consumo é zero. Trata-se do equilíbrio de longo prazo.
- Se $r_{t+1} > \theta \Rightarrow \Delta c_{t+1}/c_t > 0$
- Se $r_{t+1} < \theta \Rightarrow \Delta c_{t+1}/c_t < 0$

O que afeta o consumo das famílias?

- Considere $r_t = r = \theta$ (ou seja, o equilíbrio de longo prazo). Pode-se substituir c_{t+s} por c_r na equação (2.20) para se obter:

$$\begin{aligned} W_t &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_{t+s}}{(1+r)^s} = \frac{1+r}{r} c_t \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x_{t+s}}{(1+r)^s} + (1+r)a_t \quad (1.27) \end{aligned}$$

Função Consumo

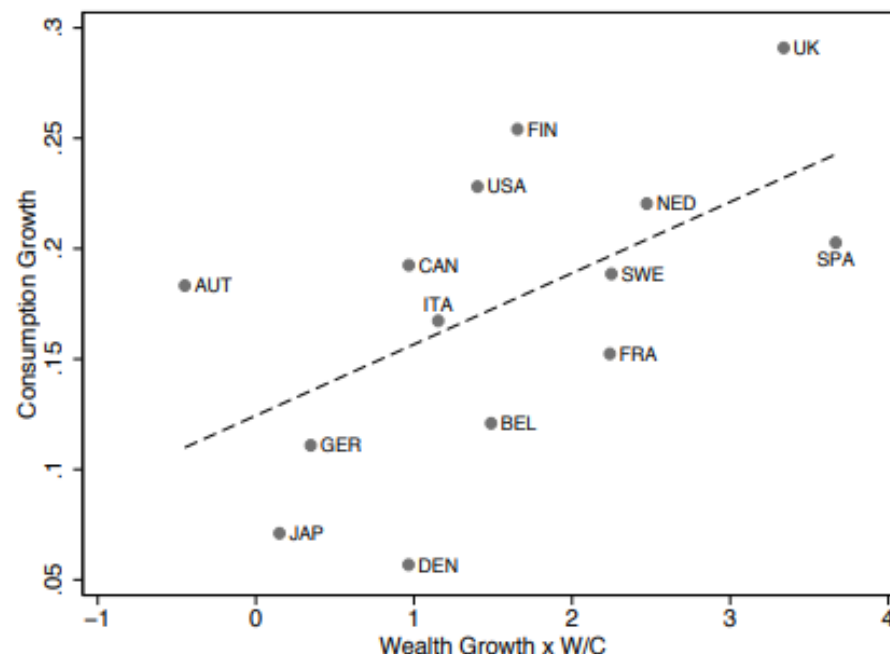
- Portanto, a **função consumo** será dada por:

$$c_t = \frac{r}{1+r} W_t = r \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x_{t+s}}{(1+r)^{s+1}} + r a_t \quad (1.28)$$

- Ou seja, em cada período, o consumo é proporcional à riqueza.
- Isso significa que, em estado estacionário, o consumo em cada período é uma parcela fixa da riqueza total.
- Essa equação representa a **hipótese da renda permanente de Friedman**.

Evidências empíricas

Figure 1: Consumption Growth and Wealth Growth 1994–2002



Note: Consumption growth and rescaled wealth growth between 1994Q4 and 2002Q4; wealth growth is rescaled by multiplying with the wealth–consumption ratio of 1994Q4. Slope of the regression line, $MPC_w^{LR} = 0.032$, t-statistic: 2.36, p-value: 0.018.

1.5 Choques de Renda

(Choques Permanentes)

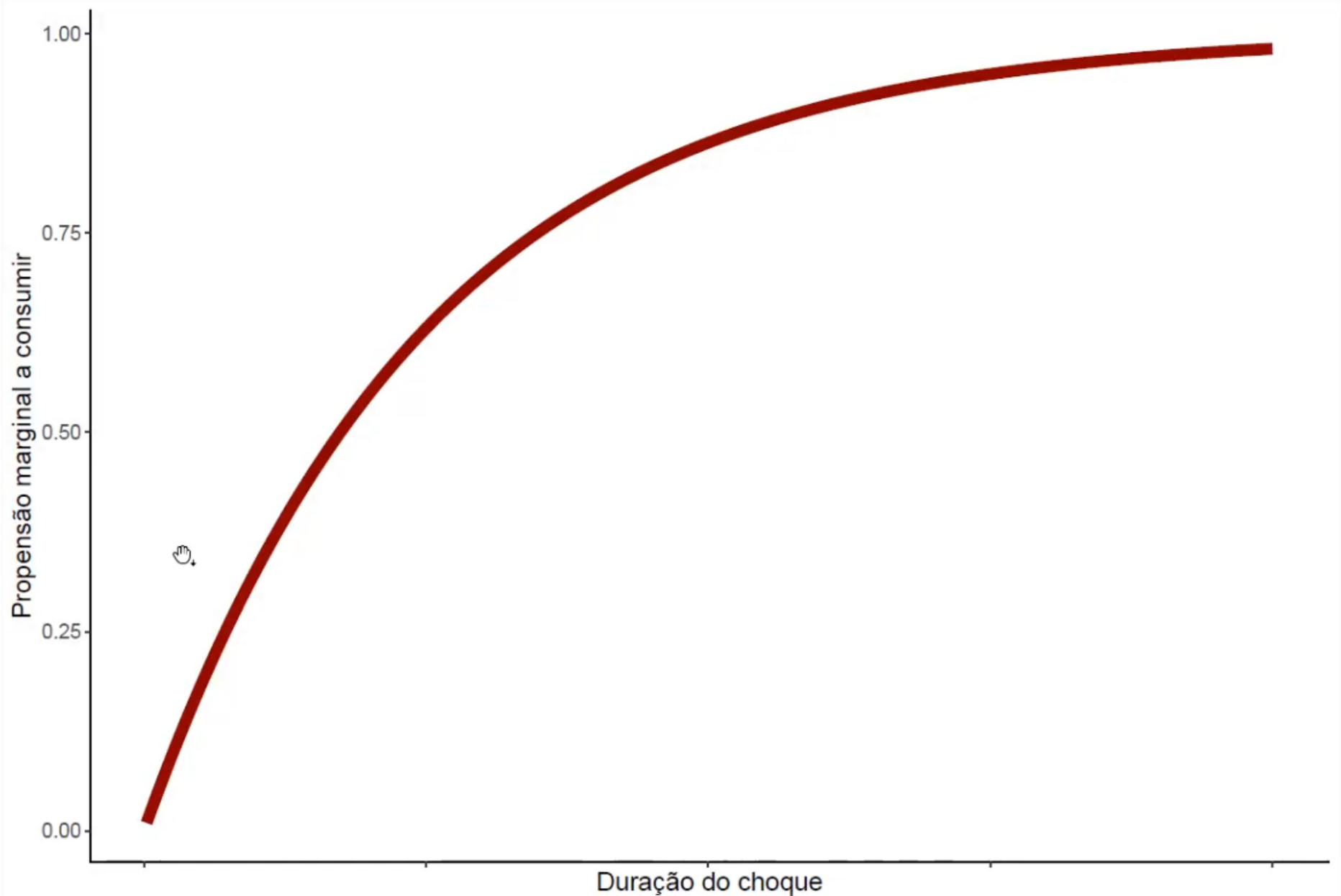
Choques de Renda

- Suponha que a renda x_t é constante em cada período. Então, a equação (1.28) se torna:

$$c_t = x_t + r a_t \quad (1.29)$$

- O consumo, portanto, varia conforme a família possui bens ($a_t > 0$) ou dívida ($a_t < 0$).
- Um choque permanente na renda terá, portanto, o mesmo efeito sobre o consumo, que é o postulado keynesiano de propensão marginal a consumir igual a um: $PMgC = 1$.

Choques de Renda



Choques de Renda

- Para analisar o efeito de um choque temporário sobre a renda, reescreva (1.28) como:

$$c_t = \frac{r}{1+r} x_t + \frac{r}{(1+r)^2} x_{t+1} + \dots + r a_t$$

- Um choque temporário de renda no período t , portanto, terá somente uma propensão marginal a consumir igual a $r/(1+r)$.
- Portanto, os efeitos de um corte de impostos permanente e de um corte de impostos temporário são muito diferentes.

1.6 Choques de Taxa de Juros

(Choques Temporários)

Choques de Taxas de Juros

- Relembre a equação (1.19b), referente ao valor presente da renda total:

$$W_t = \sum_{s=1}^{n-1} \frac{x_{t+s}}{\prod_{s=1}^{n-1} (1 + r_{t+s})} + x_t + (1 + r_t)a_t$$

- O efeito de uma mudança temporária no período t novamente depende se a família possui bens ($a_t > 0$) ou dívida ($a_t < 0$).

Choques de Taxas de Juros

- O efeito no consumo, todavia, é menor devido à substituição intertemporal:

$$PMgC = \frac{r}{(1 + r)}$$

- Na prática, o consumo depende das expectativas dos retornos dos ativos futuros (Shiller, 2009).

1.7 Choques de Renda

(Choques Antecipados e não Antecipados)

Choques de Renda (não) Antecipados

$$\frac{\Delta c_{t+1}}{c_t} = \frac{1}{\sigma} \left[1 - \frac{1}{\beta(1+r_{t+1})} \right]$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta c_{t+1}}{c_t} = \frac{r_{t+1} - \theta}{\sigma(1+r_{t+1})} \quad (1.26)$$

$$c_t = \frac{r}{1+r} W_t = r \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x_{t+s}}{(1+r)^{s+1}} + r a_t \quad (1.28)$$

Choques de Renda (não) Antecipados

- A equação (1.26) não contém informação sobre renda. Se $r_{t+1} = \theta$, então $c_{t+1} = c_t$.
- Mas, se a mudança na renda é antecipada, a informação é incorporada em c_t . Logo:

$$c_{t+1} = c_t + e_{t+1}$$

Em que e_{t+1} é um choque aleatório: $E_t(e_{t+1}) = 0$.

- Nesse caso, o consumo é chamado de processo *martingale*:

$$E_t(c_{t+1}) = c_t$$

Poupança

- Para taxa de juros constante, a poupança é dada por:

$$s_t = x_t + ra_t - c_t$$

Substituindo $(ra_t - c_t)$ em (1.28), teremos:

$$\begin{aligned} s_t &= x_t - r \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x_{t+s}}{(1+r)^{s+1}} = - \left(\frac{r}{1+r} \right) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{x_{t+s} - x_t}{(1+r)^s} \\ &= - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Delta x_{t+s}}{(1+r)^{s+1}} \end{aligned}$$

Isso significa que a poupança é usada para compensar mudanças futuras previstas na renda.

1. Dinâmica do Consumo

2. Dinâmica do Trabalho

2.1 Oferta de Trabalho Endógena

Oferta de trabalho endógena

- Considere agora que a quantidade de horas trabalhadas não é fixa, mas sim o resultado de uma decisão das famílias.
- A função utilidade é dada por $U(c_t, l_t) = U(c_t, 1 - n_t)$, com $U_c > 0, U_n < 0, U_{cc} \leq 0, U_{nn} \leq 0, U_{n,t} = -U_l$.
- A **restrição orçamentária** é dada por:

$$\underbrace{\Delta a_{t+1} + c_t}_{\text{destino dos recursos}} = \underbrace{w_t n_t + x_t + r_t a_t}_{\text{renda}} \quad (2.1)$$

Oferta de trabalho endógena

- Em que:

x_t : renda exógena, mas agora essa renda exclui a renda do trabalho.

w_t : taxa salarial

r_t : taxa de juros

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{s=0}^{\infty} \{ \beta^s U(c_{t+s}, 1 - n_{t+s}) \\ &+ \lambda_{t+s} [w_t n_t + x_t + (1 + r_{t+s}) a_{t+s} - c_{t+s} - a_{t+s+1}] \} \quad (2.2) \end{aligned}$$

Oferta de trabalho endógena

Condições de Primeira Ordem (CPO):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{t+s}} = \beta^s U_{c,t+s} - \lambda_{t+s} = 0, \quad s \geq 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_{t+s}} = -\beta^s U_{l,t+s} + \lambda_{t+s} w_{t+s} = 0, \quad s \geq 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{t+s}} = \lambda_{t+s}(1 + r_{t+s}) - \lambda_{t+s-1} = 0, \quad s > 0 \quad (2.5)$$

E a restrição orçamentária é dada por (2.1).

Oferta de trabalho endógena

Combinando (2.3) e (2.4), tem-se:

$$\frac{U_{l,t}}{U_{c,t}} = w_t \quad (2.6)$$

Ao combinar (2.3) e (2.5), tem-se a Equação de Euler:

$$\frac{\beta U_{c,t+1}}{U_{c,t}} (1 + r_{t+s}) = 1 \quad (2.7)$$

Função Consumo

- A função consumo, derivado da restrição orçamentária (2.1), com taxa de juros constantes, é similar à expressão anteriormente estudada:

$$\begin{aligned} c_t &= \left(\frac{r}{1+r} \right) W_t \\ &= r \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{w_{t+s} \textcolor{red}{n}_{t+s}}{(1+r)^{s+1}} + \frac{x_{t+s}}{(1+r)^{s+1}} \right] + r a_t \end{aligned} \quad (2.8)$$

Função Consumo

- Onde a riqueza ou renda permanente é dada por:

$$W_t = \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{w_{t+s} n_{t+s}}{(1+r)^s} + \frac{x_{t+s}}{(1+r)^s} \right] + (1+r)a_t$$

Equações (2.6), (2.7) e (2.8) são usadas para resolver a trajetória ótima de c_t , n_t e a_t .

Oferta de trabalho endógena

- Deve-se trabalhar com a equação (2.6), considerando a função utilidade:

$$U(c_t, l_t) = \left[\frac{(c_t^{1-\sigma} - 1)}{(1 - \sigma)} \right] + \ln(l_t)$$

Em que $l_t = 1 - n_t$. A equação (2.6) se torna:

$$\frac{c_t^\alpha}{1 - n_t} = w_t$$

Oferta de trabalho endógena

- A equação da oferta de trabalho será dada por:

$$n_t = 1 - \frac{c_t^\sigma}{w_t} \quad (2.8)$$

- Para um aumento salarial temporário no período t ($\uparrow w_t$), o consumo aumenta ($\uparrow c_t$), dado que:

$$PMgC = \frac{r}{1 + r}$$

Portanto, a função de oferta de trabalho é ascendente.

Oferta de trabalho endógena

$$PMgC = \frac{r}{1+r}$$

- $\uparrow w_t \Rightarrow \uparrow n_t$: relação tradicional entre quantidade ofertada de trabalho e salário real.
- $\uparrow c_t \Rightarrow \downarrow n_t$: p. ex., um aumento da renda que leve ao aumento do consumo faz com que a oferta de trabalho diminua.

No entanto, para um aumento salarial permanente, o efeito líquido sobre n_t é ambíguo.

2.2 Empresas (Firmas)

Hipóteses

Objetivo

- maximizar o valor presente do lucro atual e futuro.

Decisões de produção

- nível de produção (y_t), e insumos de fatores de produção (k_t) e (n_t)

Decisões financeiras

- financiamento do nível da dívida (b_t), mas sem financiamento de capitais financeiros (*equities*)

Função de Produção

- $y_t = F(k_t, n_t)$

Acumulação de capital

- $k_{t+1} = i_t + (1 - \delta)k_t$

Maximização do Lucro

- Considere o caso no qual as empresas combinam capital e trabalho, na ausência de custos de ajustamento, com o objetivo de maximizar lucros. O **valor presente do fluxo de lucros reais descontado usando uma taxa de juros real constante** é dado por:

$$\mathcal{P}_t = \sum_{s=0}^{\infty} (1+r)^{-s} \Pi_{t+s} \quad (2.9)$$

Em que r é uma taxa de desconto constante.

$$\Pi_t = y_t - w_t n_t - i_t + \Delta b_{t+1} - r b_t \quad (2.10)$$

Maximização do Lucro

- Considere $y_t = F(k_t, n_t)$;
- Dada a lei de movimento do capital, $\Delta k_{t+1} = i_t - \delta k_t$, pode-se reescrever o lucro da empresa como:

$$\Pi_t = y_t - w_t n_t - i_t + \Delta b_{t+1} - r b_t$$

$$\Pi_t = F(k_t, n_t) - w_t n_t - \underbrace{(\Delta k_{t+1} + \delta k_t)}_{i_t} + \underbrace{(b_{t+1} - b_t)}_{\Delta b_{t+1}} - r b_t$$

Maximização por lucro

$$\Pi_t = F(k_t, n_t) - w_t n_t - \underbrace{(k_{t+1} - k_t)}_{\Delta k_{t+1}} - \delta k_t + b_{t+1} - b_t - r b_t$$

$$\Pi_t = F(k_t, n_t) - w_t n_t - k_{t+1} + k_t - \delta k_t + b_{t+1} - b_t - r b_t$$

$$\begin{aligned} \Pi_t \\ = F(k_t, n_t) - w_t n_t - k_{t+1} + (1 - \delta)k_t + b_{t+1} - (1 + r)b_t \quad (2.11) \end{aligned}$$

Maximização do Lucro

A firma escolhe n_{t+s} , k_{t+s+1} e b_{t+s+1} para maximizar:

$$\max_{\{n_{t+s}, k_{t+s+1}, b_{t+s+1}\}} \mathcal{P}_t = \sum_{s=0}^{\infty} (1+r)^{-s} \{F(k_{t+s}, n_{t+s}) - w_{t+s} n_{t+s} - k_{t+s+1} + (1-\delta)k_{t+s} + b_{t+s+1} - (1+r)b_{t+s}\} \quad (2.12)$$

Condições de Primeira Ordem (CPO):

$$\frac{\partial \mathcal{P}_t}{\partial n_{t+s}} = (1+r)^{-s} \{F_{n,t+s} - w_{t+s}\} = 0, \quad s \geq 0 \quad (2.13)$$

Maximização do Lucro

$$\frac{\partial \mathcal{P}_t}{\partial k_{t+s}} = (1+r)^{-s} \{F_{k,t+s} + 1 - \delta\} - (1+r)^{-(s-1)} = 0, \\ s > 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_t}{\partial b_{t+s}} = (1+r)^{-s}(1+r) - (1+r)^{-(s-1)} = 0, \\ s > 0 \quad (2.15)$$

Maximização do Lucro

- A equação da terceira CPO é independente de b_t .
- Isso significa que qualquer nível de dívida é consistente com a maximização do lucro, de modo que a empresa pode escolher financiamento por dívida ou lucros retidos para financiar novos investimentos.

Maximização do Lucro

- A primeira CPO fornece a equação de demanda por trabalho, que é dada por:

$$F_{n,t} = w_t \quad (2.16)$$

Em que, dado certo estoque de capital, o produto marginal do trabalho é igual ao salário real.

- A segunda CPO fornece a equação de demanda por capital, que é dada por:

$$F_{k,t+1} = r + \delta \quad (2.17)$$

Como isso muda na presença de custos de ajustamento?

Capital e Investimento

Para um dado nível de insumo trabalho, tem-se que:

$$k_{t+1} = F_k^{-1}(r + \delta)$$

O investimento bruto é dado por:

$$i_t = F_k^{-1}(r + \delta) - (1 - \delta)k_t$$

- Uma vez que $F_{kk} < 0$, obtém-se o resultado keynesiano de que o investimento é uma função decrescente da taxa de juros.
- Um choque tecnológico permanente eleva os níveis ótimos de estoque de capital e de investimento.
- No curto prazo, a produtividade marginal do capital depende do custo de financiamento (r).
- No estado estacionário (equilíbrio geral): $F_k(k, n) = \theta + \delta$

Demanda por trabalho

Deve-se trabalhar agora na presença de custos de ajustamento do fator trabalho. Até o momento, trabalhava-se com as horas de trabalho por trabalhador. Contudo, pode-se ter mudanças tanto na quantidade de horas trabalhadas, quanto no número de trabalhadores.

- As famílias escolhem se querem ou não participar da força de trabalho, número total de trabalhadores: n_t
- As empresas decidem o número de horas de trabalho de cada trabalhador: h_t

Demanda por trabalho

- Salário por trabalhador é dado por: $W(h_t)$, com $W' \geq 0$ e $W'' \leq 0$.
- Mudanças no número de trabalhadores envolvem custos de ajustamento para as firmas:

$$\frac{1}{2} \lambda (\Delta n_{t+1})^2, \lambda > 0$$

Demanda por trabalho

- Deve-se introduzir custos para contratação e demissão de empregados.
- Considere que a produção é abstrata em relação ao capital: $y_t = F(n_t, h_t)$
- A lei de movimento na força de trabalho é dada por:

$$n_t = v_t - q_t + n_{t-1} \quad (2.18)$$

Onde v_t são as contratações, e q_t são as demissões.

Demanda por trabalho

Os lucros das empresas, em cada período t , são dados por:

$$\Pi_t = F(n_t, h_t) - W_t(h_t)n_t - \frac{1}{2}\lambda(\Delta n_{t+1})^2 \quad (2.19)$$

A firma escolhe n_t e h_t para maximizar:

$$\mathcal{P}_t = \sum_{s=0}^{\infty} (1+r)^{-s} \left\{ F(n_t, h_t) - W(h_t)n_t - \frac{1}{2}\lambda(\Delta n_{t+1})^2 \right\}$$

Demanda por trabalho

Condições de Primeira Ordem (CPO):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}_t}{\partial n_{t+s}} &= (1+r)^{-s} (F_{n,t+s} - W_{t+s} + \lambda \Delta n_{t+s+1}) \\ &+ (1+r)^{-(s-1)} \lambda \Delta n_{t+s} = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_t}{\partial h_{t+s}} = (1+r)^{-s} (F_{h,t+s} - W'_{t+s} n_{t+s}) = 0 \quad (2.21)$$

Demanda por trabalho

Da equação (2.21), tem-se que:

$$\frac{F_{h,t}}{n_t} = W'_t \quad (2.22)$$

Ou seja, o produto marginal do trabalhador (lado esquerdo) é igual ao salário marginal (lado direito).

O produto marginal da hora de trabalho por trabalhador é igual à taxa horária marginal. Dado o número de trabalhadores (n_t), o resultado fornece o número de horas por trabalhador.

Dinâmica do emprego

Da equação (2.20), tem-se que:

$$\Delta n_t = \frac{1}{1+r} \Delta n_{t+1} + \frac{1}{\lambda(1+r)} (F_{n,t} - W_t) \quad (2.23)$$

A qual, em equilíbrio ($\Delta n_t = \Delta n_{t+1} = 0$), resulta na mesma condição que o modelo sem custo de ajustamentos ($F_{n,t} = W_t$).

Dinâmica do emprego

Pode-se reescrever a equação anterior em níveis de emprego:

$$n_t = \frac{1}{2+r} n_{t+1} + \frac{1+r}{2+r} n_{t-1} + \frac{1}{\lambda(2+r)} (F_{n,t} - W_t) \quad (2.24)$$

2.3 Equilíbrio Geral

Mercados e Agentes

- Famílias e empresas se encontram em três mercados:
 - ▶ Mercado de bens e serviços: determinam o Produto Interno Bruto (PIB), o consumo das famílias e o investimento das firmas.
 - ▶ Mercado de trabalho: determina o número de trabalhadores e as horas trabalhadas.
 - ▶ Mercado financeiro: (coordenam a alocação da poupança em ativos financeiros – ações e títulos).

Restrições: famílias e empresas

Da contabilidade nacional, sabe-se que:

$$y_t = c_t + i_t = F(k_t, n_t) \quad (2.25)$$

A restrição das famílias é dada por:

$$\Delta a_{t+1} + c_t = w_t n_t + x_t + r_t a_t \quad (2.26)$$

A lei de movimento do capital é dada por:

$$\Delta k_{t+1} = i_t - \delta k_t \quad (2.27)$$

Restrições: famílias e empresas

Ao combinar as três equações anteriores, tem-se que:

$$x_t = F(k_t, n_t) - w_t n_t - \Delta k_{t+1} - \delta k_t + \Delta a_{t+1} - r a_t \quad (2.28)$$

Dado que:

$$\Pi_t = y_t - w_t n_t - i_t + \Delta b_{t+1} - r b_t \quad (2.29)$$

Tem-se que:

$$x_t - \Pi_t = \Delta(a_{t+1} - b_{t+1}) - r(a_t - b_t) \quad (2.30)$$

E como os ativos das famílias (a) são iguais às dívidas das empresas (b), tem-se que $x_t = \Pi_t$.

Restrições: famílias e empresas

Como $F_{n,t} = w_t$ e $F_{k,t} = r + \delta$, pode-se reescrever a equação de lucro da seguinte forma:

$$\Pi_t = F(k_t, n_t) - F_{n,t}n_t - \Delta k_{t+1} - (F_{k,t+1} - r)k_t + \Delta b_{t+1} - rb_t$$

$$\Pi_t = F(k_t, n_t) - F_{n,t}n_t - F_{k,t+1}k_t + r k_t - \Delta(k_{t+1} - b_{t+1}) + \Delta b_{t+1} - rb_t \quad (2.31)$$

Restrições: famílias e empresas

O Teorema de Euler diz que, se a função de produção for homogênea de grau 1 (isto é, retornos constantes de escala), tem-se que:

$$F(k_t, n_t) = F_{n,t}n_t + F_{k,t}k_t \quad (2.32)$$

Pode-se reescrever a equação de lucro como:

$$\Pi_t = -(k_{t+1} - b_{t+1}) + (1 + r)(k_t - b_t) \quad (2.33)$$

Onde $(k_t - b_t)$ pode ser interpretado como o valor líquido da empresa.

Restrições: famílias e empresas

A equação anterior pode ser reescrita como:

$$k_t - b_t = \frac{\Pi_t + (k_{t+1} - b_{t+1})}{1 + r} \quad (2.34)$$

Ou

$$k_t - b_t = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Pi_{t+s}}{(1 + r)^{s+1}} \quad (2.35)$$

Com a seguinte condição de transversalidade:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k_{t+s} - b_{t+s}}{(1 + r)^s} = 0 \quad (2.36)$$

Mercado de trabalho

O equilíbrio no mercado de trabalho é dado por:

$$F_{n,t} = w_t \text{ (demanda)}$$

$$U_{n,t} = -w_t U_{c,t} \text{ (oferta)}$$

$$w_t = F_{n,t} = -U_{n,t}/U_{c,t} \text{ (equilíbrio)}$$

Mercado de trabalho

Deve-se trabalhar com uma Função de Produção Cobb-Douglas: $y_t = A_t k_t^\alpha n_t^{1-\alpha}$, em que:

$$F_{n,t} = (1 - \alpha) A_t \left(\frac{k_t}{n_t} \right)^\alpha$$

Considere também:

$$U(c_t, l_t) = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} + \ln(1 - n_t)$$

Logo:

Mercado de trabalho

Demanda:

$$n_t^d = \left[\frac{w_t}{(1-\alpha)A_t} \right]^{-\alpha} k_t$$

Oferta:

$$n_t^s = 1 - \frac{c_t^\sigma}{w_t}$$

Equilíbrio

$$n_t = \left[\frac{w_t}{(1-\alpha)A_t} \right]^{-\alpha} k_t = 1 - \frac{c_t^\sigma}{w_t}$$

Mercado de trabalho

No mercado de bens e serviços, tem-se que:

$$y_t^d = c_t + i_t \text{ (demanda)}$$

E com as definições sobre a dinâmica do capital e da função de produção, pode-se reescrever a equação acima da seguinte forma.

Demanda:

$$y_t^d = c_t + \left[\frac{\alpha A_t}{r + \delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} n_t - (1 - r - \delta)k_t$$

Mercado de trabalho

Oferta:

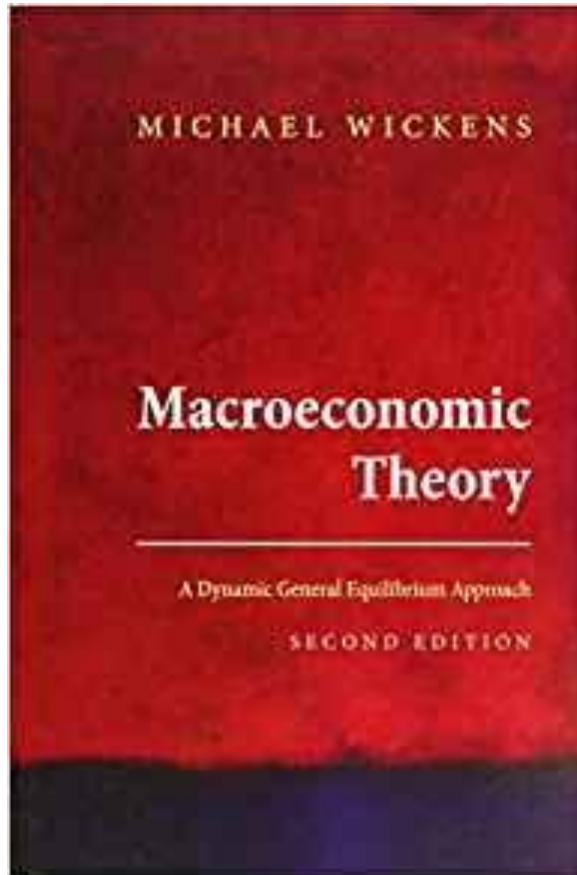
$$y_t^s = A_t k_t^\alpha n_t^{1-\alpha}$$

No equilíbrio, tem-se que:

$$y_t^s = y_t^d$$

$$A_t k_t^\alpha n_t^{1-\alpha} = c_t + \left[\frac{\alpha A_t}{r + \delta} \right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}} n_t - (1 - r - \delta) k_t$$

Referências bibliográficas



Capítulo 4

Referências bibliográficas

COSTA FILHO. J. R. **Macroeconomia Dinâmica**. Curso de Capacitação. Brasília, 2024.

JEHLE, G. A.; RENY, P. J. **Advanced Microeconomic Theory**, Third Edition. Essex: Pearson Education Limited, 2011.

KAMIHIGASHI, T. **Transversality conditions and dynamical economic behavior**. In: The New Palgrave Dictionary of Economics, Second Edition, 2006.

RODRIGUES, M. **Curso de Teoria Macroeconômica**. Universidade de São Paulo, 2021.

SHILLER, R. J. Unlearned lessons from the housing bubble. **The Economists' Voice**, v. 6, n. 7, 2009.

Obrigado!

Contato:

PROF. DR. SÉRGIO RICARDO DE BRITO GADELHA

E-mail: sergio.gadelha@idp.edu.br e professor.sergio.Gadelha@gmail.com

Sítio eletrônico: <https://sergiorbgadelha.com.br/>