

Macroeconomia Avançada

Aula 2(d): A Economia Centralizada

Modelo Básico de Equilíbrio Geral Dinâmico (Modelo DGE)

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans (Tempo Contínuo)

Famílias

Firmas

Equilíbrio Geral

Dinâmica

Informativo

Essa nota de aula é um resumo dos principais tópicos constantes nas referências bibliográficas da disciplina Macroeconomia Avançada, lecionada no Programa de Doutorado e Mestrado em Economia do Instituto Brasileiro de Ensino, Desenvolvimento e Pesquisa (IDP).

Eu destaco que essa nota de aula não tem fins comerciais, servindo exclusivamente como material de apoio às aulas dessa disciplina.

Quaisquer erros e omissões são de minha inteira responsabilidade.

Contribuições e considerações podem ser enviadas para:

sergio.gadelha@idp.edu.br ou
professor.sergio.Gadelha@gmail.com

Hipóteses sobre as famílias: Preferências

(i) Modelo de Família (Agente) Representativa(o): existe um contínuo de famílias (residências, *households*) idênticas, distribuídas uniformemente no intervalo $[0,1]$.

(ii) Famílias “vivem para sempre” (horizonte infinito). Trata-se de uma dinastia, em que gerações estão interconectadas, e existe um altruísmo intergeracional.

Hipóteses sobre as famílias: Preferências

(iii) Cada família possui N_t membros idênticos (isto é, homogêneos) no instante t . O tamanho da família representativa (população) cresce à taxa constante n : $(\dot{N}_t/N_t) = n$. Isto é, n é a taxa de crescimento populacional, que também é a taxa de crescimento do número de trabalhadores, sendo constante e exógeno.

$\dot{N}_t$ é a derivada da variável N no tempo.

Quando se divide $\dot{N}_t$ por N_t , obtém-se uma taxa de crescimento populacional.

→ Como há medida 1 de famílias, N_t é igual à população. Cada indivíduo é também um trabalhador, de modo que N_t é também igual ao tamanho da força de trabalho. Cada membro oferta uma unidade de trabalho em cada ponto no tempo.

→ Cada residente tem um capital inicial, $K(0)/H$, onde $K(0)$ é a quantidade inicial de capital na economia, e H é o número de famílias (residentes).

Regras de Integração

A equação diferencial que descreve o crescimento exponencial da família representativa (ou população) é:

$$\frac{dL}{dt} = nL$$

Integrando:

$$\int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \int_0^t n dt \Rightarrow |\ln L|^{L=L_0} = |nt|^{t=0} \therefore \ln L - \ln L_0 = nt$$
$$\therefore \ln \left(\frac{L}{L_0} \right) = nt$$

Regras de Integração

Exponenciando:

$$L(t) = L_0 e^{nt} \therefore L_0 = L(0) = 1 \therefore L(t) = e^{nt}$$

Regras de integração:

$$\int \frac{1}{dx} = \ln|x|$$

$$\int a dx = ax$$

Regras de Integração

$$\int_a^b f(x)dx = |F(x)|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

Onde a e b são constantes

Propriedades de Logaritmos

$$\ln \left(\frac{x}{y} \right) = \ln x - \ln y$$

E, por definição:

$$y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x$$

Hipóteses sobre as famílias: Preferências

(iv) Utilidade ao longo a vida é separável no tempo (utilidade instantânea).

Função utilidade instantânea de cada membro da família: $u(c_t)$

Em um dado instante t , o bem-estar da família representativa será:

$$U_s = \int_s^{\infty} e^{-\rho(t-s)} u(c_t) \frac{L_t}{H} dt \quad (2.1)$$

Onde: c_t é o consumo *per capita* (consumo por trabalhador ou por membro da família) no tempo t ;

s é o tempo presente (corrente).

Hipóteses sobre as famílias: Preferências

$u(\cdot)$ é a **função utilidade instantânea** do consumo *per capita* da família representativa, que fornece a utilidade de cada membro em um dado período t ; “fluxo de caixa de utilidades”: soma-se as utilidades ao longo da vida, mas com a ponderação de que, quanto mais próximo do presente está a família, maior será o peso na utilidade.

L_t é o número total da população da economia;

L_t/H é o número de membros (ou trabalhadores) por família. Logo, a utilidade da família aumenta com o consumo por membro com o número de membros;

Assume-se $H = 1$ como uma normalização.

Hipóteses sobre as famílias: Preferências

A hipótese é que os indivíduos vão querer otimizar a utilidade como ele é vista no presente (isto é, no tempo $t = 0$), e para isso nós trazemos o futuro como sendo a soma das utilidades atualizados a uma taxa de retorno (ρ), isto é, a utilidade depende do consumo hoje e no futuro:

$$\begin{aligned} U &= U(0) \\ &= U(\bar{C}(0)) + \left(\frac{1}{1+\rho}\right) U(\bar{C}(1)) + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2 U(\bar{C}(2)) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t U(\bar{C}(t)) \end{aligned}$$

Hipóteses sobre as famílias: Preferências

ρ é a **taxa de desconto social (temporal, subjetiva) ou taxa (grau) de impaciência**, $\rho > 0$. Essas famílias são “impacientes”, de modo que o consumo no presente tem mais valor que no consumo futuro: quanto mais afastado um instante no tempo, menor o valor do consumo. O termo ρ é positivo porque os indivíduos preferem consumir logo do que esperar!

$1/(1 + \rho)$ é o **fator de desconto** que captura o peso que um indivíduo coloca no futuro relativo a hoje.

Hipóteses sobre as famílias: Preferências

Indivíduo é impaciente: quanto maior for ρ , menos o indivíduo valoriza o consumo futuro em relação ao consumo presente. Ou seja, se o ρ for alto, o indivíduo valoriza mais o presente do que o futuro. Se o indivíduo é muito impaciente (ρ muito alto), então o fator de desconto $1/(1 + \rho)$ é muito baixo e, portanto, o indivíduo tem menos preocupação com o futuro. Ou, interpretando $1/(1 + \rho)$ como a probabilidade de sobreviver até o próximo período, o presente é mais importante: $U \approx U(\bar{C}(0))$.

Indivíduo é paciente: Quanto menor for ρ , mais o indivíduo valoriza o consumo futuro em relação ao consumo presente. Se o ρ for baixo, o indivíduo valoriza mais o futuro do que o presente.

Se $\rho = 0$, então $1/(1 + \rho) = 1$, de modo que hoje e o futuro tem igual peso.

Hipóteses sobre as famílias: Preferências

Utilidade instantânea $u(\cdot)$ é **crescente** (mais consumo gera mais utilidade) e **côncava** (na margem, a utilidade vai importando cada vez menos): $u'(c) > 0$, $u''(c) < 0$.

Para evitar solução de canto, utilidade marginal tende ao infinito quando o consumo vai para zero:

$$\lim_{c \rightarrow 0} u'(c) = \infty$$

Observação: no tempo discreto, a utilidade ao longo da vida é dada por:

$$\sum_{s=t}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho} \right)^{t-s} u(c_t)$$

→ trata-se de um fluxo de caixa de utilidade.

Famílias

Firmas

Equilíbrio Geral

Dinâmica

Tecnologia

(i) Produto homogêneo (Y_t), gerado com capital (K_t) e trabalho (N_t). Nesta economia, o número de pessoas (famílias) é igual ao número de trabalhadores.

(ii) Função de Produção:

$$Y_t = F(K_t, N_t) \quad (2.2)$$

$F(K_t, N_t)$ satisfaz:

- Retornos constantes de escala
- Condições de Inada

Condições de Inada

$F(K, 0) = F(0, N) = 0$ (se houver solução de canto, o produto será zero!)

$$F_K > 0, F_N > 0$$

$$F_{KK} < 0, F_{NN} < 0$$

$$\lim_{K \rightarrow 0} F_K = \lim_{N \rightarrow 0} F_N = \infty$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} F_K = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N = 0$$

Tecnologia

Note que $F_K = \partial F / \partial K$ é o produto marginal do capital, que é decrescente com K (ou seja, há retornos marginais decrescentes para cada insumo individualmente).

Produto pode ser usado para consumo (C_t) ou investimento (I_t): contas nacionais!

$$Y_t = C_t + I_t \quad (2.3)$$

Bem de consumo pode ser transformado em bem de investimento sem custos, e vice-versa.

Tecnologia

Lei do movimento do capital:

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t \quad (2.4)$$

$\delta > 0$: taxa de depreciação

O investimento expande o estoque de capital ao longo do tempo.

Famílias

Firmas

Equilíbrio Geral

Dinâmica

Economia centralizada: planejador central

Planejador Central Benevolente: são as autoridades que querem maximizar o bem-estar dos indivíduos enquanto tentam levar a economia ao estado estacionário. O Planejador considera a seguinte restrição de recursos:

$$y(t) = c(t) + \dot{k}(t) + \delta k(t)$$

Onde c é o consumo; $y(t) = f(k)$ é o produto per capita; δ é a taxa de depreciação; $\dot{k}$ é o investimento líquido; δk é a depreciação total; $k(t) + \delta k(t)$ é o investimento bruto;

$$\dot{k} = \frac{\partial k}{\partial t}$$

Restrição de Recursos

Variáveis em termos *per capita*: $c_t = C_t/N_t$, $y_t = Y_t/N_t$,
 $k_t = K_t/N_t$

Combinando (2.2), (2.3) e (2.4):

$$C_t + \dot{K}_t + \delta K_t = F(K_t, N_t)$$

Dividindo por N_t e usando o fato de que F satisfaz retornos constantes de escala:

Restrição de Recursos

$$\frac{C_t}{N_t} + \frac{\dot{K}_t}{N_t} + \delta \frac{K_t}{N_t} = F\left(\frac{K_t}{N_t}, \frac{N_t}{N_t}\right) = F\left(\frac{K_t}{N_t}, 1\right)$$

$$c_t + \frac{\dot{K}_t}{N_t} + \delta k_t = f(k_t) \quad (2.5)$$

Em que:

$$F\left(\frac{K_t}{N_t}, 1\right) = F(k_t, 1) \equiv f(k_t)$$

Restrição de Recursos

Das condições de Inada, tem-se que $f(0) = 0$, $f'(k_t) > 0$, $f''(k_t) < 0$, $f'(0) = \infty$, $f'(\infty) = 0$. Além disso, $F_K = f'(k)$

Note que:

$$\dot{k}_t = \frac{d(K_t/N_t)}{dt} \Rightarrow \dot{k}_t = \frac{\dot{K}_t N_t - K_t \dot{N}_t}{N_t^2}$$

$$\dot{k}_t = \frac{\dot{K}_t}{N_t} - \frac{K_t}{N_t} \frac{\dot{N}_t}{N_t} \Rightarrow \dot{k}_t = \frac{\dot{K}_t}{N_t} - n k_t$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{K}_t}{N_t} = \dot{k}_t + n k_t \quad (2.6)$$

Restrição de Recursos

Combinando (2.5) e (2.6), tem-se a **restrição de recursos** da economia em modelagem no instante t , em termos *per capita*:

$$c_t + \dot{k}_t + (\delta + n)k_t = f(k_t) \quad (2.7)$$

Note que, quando se ajusta pela população, o termo de depreciação passa a ser $(\delta + n)$, incorporando a taxa de crescimento populacional.

Restrição de Recursos

Capital *per capita* $k = K/N$ se reduz ao longo do tempo (de maneira exponencial) por duas forças:

(a) Depreciação física;

(b) Crescimento populacional, que faz com que o estoque de capital tenha que ser dividido entre um número cada vez maior de agentes.

O estoque de capital é a **variável de estado**:

- Estoque de capital inicial $k_0 > 0$ é dado.

Problema do Planejador Central Benevolente

Problema de Pareto: **encontrar a alocação eficiente de Pareto.**

Escolha é feita de modo centralizado: o planejador conhece as restrições da economia, e seleciona as alocações que maximizam o bem-estar dos indivíduos com base nessa informação. Em outras palavras, o planejador central irá maximizar a utilidade da família representativa.

(a) Não há decisões de famílias e firmas;

(b) Importante: não há preços no problema do planejador central benevolente porque não existe mercado!

Em resumo: **não há falhas de mercado, de modo que vale os Primeiro e Segundo Teoremas do Bem-Estar!**

Problema do Planejador Central Benevolente

O planejador escolhe as sequências de consumo e capital que maximizam o bem-estar da família representativa, dada a restrição de recursos (2.7) em cada instante t , e dado o estoque de capital *per capita* inicial k_0 .

Problema de sequência (isto é, trajetória ótima): seleciona-se $\{c_t\}_{t \in [0, \infty)}$ e $\{k_t\}_{t \in (0, \infty)}$ de modo a maximizar U_0 dado em (2.7) em todo $t \geq 0$ e dada a condição inicial $k_0 > 0$.

A métrica de bem-estar é a utilidade da família representativa!

Problema do Planejador Central Benevolente

Observe que o **planejador central** está sujeito à **restrição de recursos**. Nessa economia, cabe ao planejador central tomar as decisões, e não as famílias. Logo, o planejador central “enxerga” a restrição física da economia.

Caso houvesse um **problema de mercado**, as **famílias** até enxergam a restrição física da economia, mas como está tão perto delas, isso não fará diferença, pois em uma economia de mercado as famílias tomam decisões com base em preços.

Problema do Planejador Central Benevolente

Problema centralizado => não existe sistema de preços porque não existe mercado => planejador central está sujeito à restrição de recursos (ou restrição física da economia)

Problema descentralizado => existe sistema de preços porque existe mercado => as famílias estão sujeitas à restrição orçamentária

Problema do Planejador Central Benevolente

Problema Centralizado

Não existe sistema de preços mediando as decisões dos indivíduos. Logo, não existe mercado.

Planejador central está sujeito à restrição de recursos (ou restrição física da economia)

Problema do Planejador Central Benevolente

**Problema
Descentralizado**

Existe sistema de
preços mediando
as decisões dos
indivíduos. Logo,
existe mercado

As famílias estão
sujeitas à
restrição
orçamentária

Economia centralizada: planejador central

Resolvendo o problema da perspectiva de $t = 0$. O problema do Planejador social é maximizar:

$$\max U_0 = \int_{s=0}^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t) dt$$

Sujeito a:

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (\delta + n)k_t \text{ (restrição de recursos)}$$

$$k_0 > 0$$

$$k_t, c_t \geq 0 \text{ para dado } t \geq 0$$

Economia centralizada: planejador central

O valor corrente do Hamiltoniano é dado por:

$$H = e^{-\rho t} u(c_t) + \mu_t [f(k_t) - c_t - (\delta + n)k_t]$$

Em que:

μ_t é o **preço-sombra do capital** ou **variável de co-estado**: mede o valor presente de toda utilidade extra que se pode obter a partir do aumento de uma unidade no investimento $(\dot{k})$.

Variável de estado: k_t

Variável de controle: c_t

Condições de Ótimo

Condições de Otimalidade:

(i) Para a variável de controle:

$$\begin{aligned} H_c = \frac{\partial H}{\partial c_t} = 0 &\Rightarrow e^{-\rho t} u'(c_t) - \mu_t = 0 \\ &\Rightarrow e^{-\rho t} u'(c_t) = \mu_t \quad (2.8) \end{aligned}$$

Essa expressão diz que a utilidade marginal do consumo deve ser igual ao preço-sombra.

Condições de Ótimo

(ii) Para a variável de estado:

$$H_k = \frac{\partial H}{\partial k_t} = 0 \Rightarrow \mu_t[f'(k_t) - (\delta + n)] + \dot{\mu}_t = 0$$

$$\Rightarrow \mu_t[f'(k_t) - (\delta + n)] = -\dot{\mu}_t \quad (2.9)$$

(iii) Condição de transversalidade:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t k_t = 0 \quad (2.10)$$

Trajetória Ótima

De (2.8), segue que:

$$\mu_t = e^{-\rho t} u'(c_t)$$

Em termos de logaritmos naturais (para se ter a taxa de crescimento, aproximadamente):

$$\ln(\mu_t) = -\rho t + \ln[u'(c_t)]$$

Diferenciando contra o tempo:

$$-\frac{\dot{\mu}_t}{\mu_t} = -\rho + \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)} \dot{c}_t \quad (2.11)$$

Trajetória Ótima

Usando (2.9):

$$-\frac{\dot{\mu}_t}{\mu_t} = f'(k_t) - (\delta + n)$$

Combinando (2.9) com (2.11), encontra-se a **equação de Euler do planejador central**:

$$\rho - \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)} \dot{c}_t = f'(k_t) - (\delta + n) \quad (2.12)$$

A equação de Euler expressa o *trade-off* intertemporal com que o planejador central benevolente se defronta:

Equação de Euler

$$\rho - \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)} \dot{c}_t = f'(k_t) - (\delta + n)$$

Lado esquerdo = custo marginal de poupar hoje uma unidade a mais de consumo (isto é, postergar o consumo), que advém de dois canais:

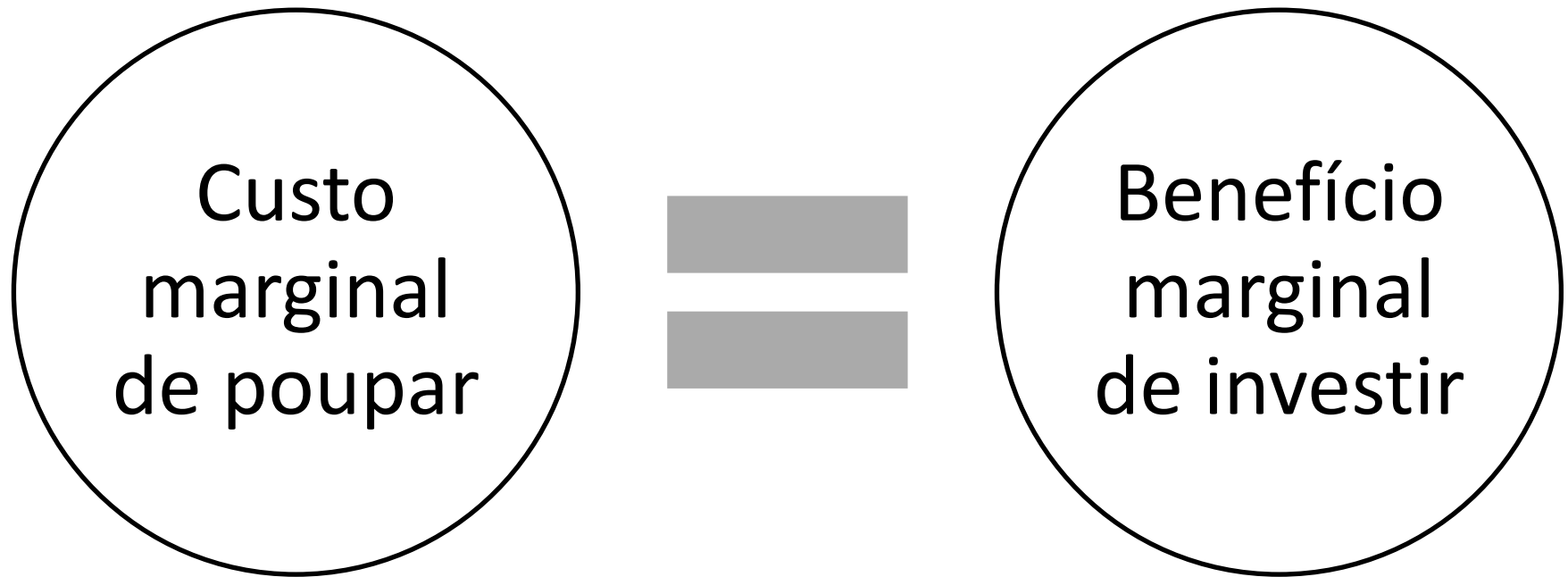
- Espera para consumir, expressa pela taxa de impaciência (ρ)
- Variabilidade do consumo no tempo, que aparece na expressão $[-u''(c_t)/u'(c_t)]$; consumo variável no tempo é penalizado na função utilidade, dado que ela é côncava.

Lado direito = benefício marginal de investir

- Sacrifício de consumo hoje permite que o capital cresça no tempo, e isso contribui para aumentar o produto per capita em $f'(k)$, isto é, o produto marginal do capital.
- Mas essa unidade extra do capital sofre depreciação $(\delta + n)$, que entra com sinal negativo no lado direito.

Equação de Euler

No ótimo, o custo marginal de poupar é igual ao benefício marginal de investir.



Condição de Transversalidade

Combinando (2.8) e (2.10), encontra-se a condição de transversalidade:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} u'(c_t) k_t = 0 \quad (2.13)$$

Essa condição indica que, **assintoticamente, o valor do capital (em termos de utilidade do consumo no presente) é igual a zero quando t vai para o infinito**. O estoque de capital não tem valor intrínseco para a família representativa, **pois sua única função é transferir consumo ao longo do tempo**. Se o limite acima fosse positivo, seria possível aumentar toda a trajetória de consumo da família representativa. Mas, se isso fosse verdade, a solução não seria ótima. Portanto, no nível ótimo, a condição de transversalidade (2.13) acima tem que valer.

Planejador central

Dessa forma, as seguintes equações caracterizam a solução do problema do planejador central benevolente:

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (\delta + n)k_t, \text{ para todo } t \geq 0 \quad (2.14)$$

$$\rho - \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)} \dot{c}_t = f'(k_t) - (\delta + n), \text{ para todo } t \geq 0 \quad (2.15)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} u'(c_t) k_t = 0 \quad (2.16)$$

Equação de Euler

Reescreve-se a **equação de Euler** para se ganhar um pouco mais de intuição, e ajudar posteriormente na resolução da dinâmica do modelo. De (2.12) segue que:

$$\left[-\frac{c_t u''(c_t)}{u'(c_t)} \right] \frac{\dot{c}_t}{c_t} = f'(k_t) - (\delta + n + \rho) \quad (2.17)$$

A expressão entre colchetes é a **curvatura da função utilidade**:

$$-\frac{cu''(c)}{u'(c)} \quad (2.18)$$

Equação de Euler

Considere dois períodos quaisquer s e t . A taxa marginal de substituição entre consumo em s e consumo em t é dada por:

$$TMgS_{c_s c_t} = \frac{\frac{\partial U_0}{\partial c_s}}{\frac{\partial U_0}{\partial c_t}} = e^{-(s-t)} \frac{u'(c_s)}{u'(c_t)}$$

Que é a inclinação (com sinal negativo) de uma curva de indiferença entre c_s e c_t .

Se a família representativa for relativamente tolerante a variações de consumo ao longo da vida:

- (i) $TMgS_{c_s c_t}$ variará pouco se a razão c_s/c_t se alterar (isto é, a inclinação ao longo da curva de indiferença muda pouco);
- (ii) No limite, se c_s e c_t forem substitutos perfeitos, a curva de indiferença é uma reta, e a $TMgS_{c_s c_t}$ é constante.

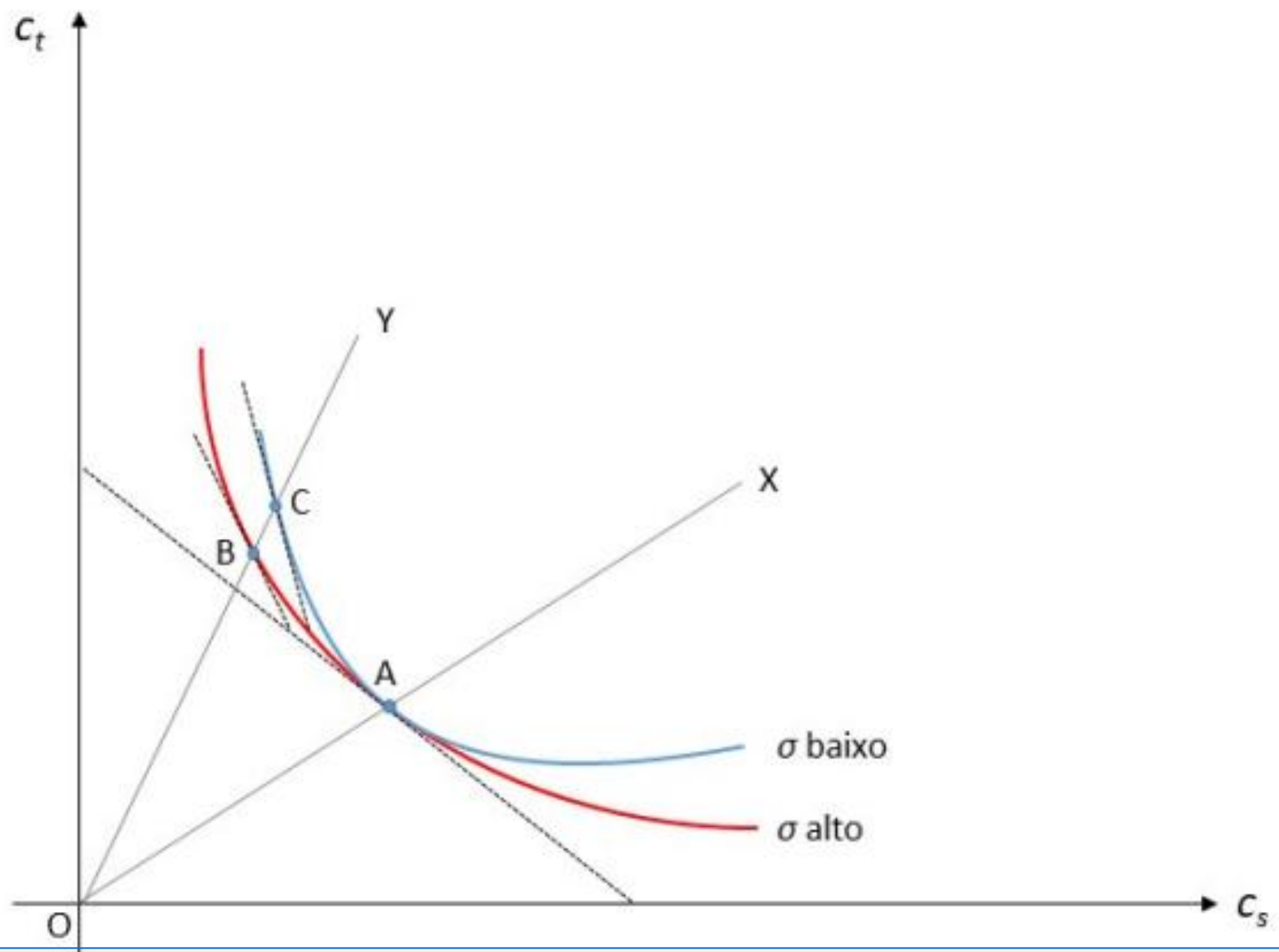
Equação de Euler

Quanto mais a $TMgS_{c_s c_t}$ variar, menos tolerante será a família representativa a mudanças de consumo no tempo.

Para avaliar como a $TMgS_{c_s c_t}$ varia ao longo da curva de indiferença, calcule como $u'(c_s)/u'(c_t)$ responde a alterações em c_s/c_t , ou seja, a seguinte elasticidade:

$$-\frac{d[u'(c_s)/u'(c_t)]}{d[c_s/c_t]} \frac{c_s/c_t}{u'(c_s)/u'(c_t)}$$

A **Figura 1** a seguir apresenta um exemplo:



→ **curva de indiferença em azul**: consumidor relativamente intolerante a trocar consumo em s por consumo em t ;

→ **curva de indiferença em vermelho**: consumidor mais tolerante a trocar consumo em s por consumo em t ;

Equação de Euler

Tomando como ponto de partida o ponto A (curvas de indiferença tangentes, $c_s = c_t$), considere uma redução na fração c_s/c_t , igual para ambos os consumidores (linha OY).

→ Inclinação da curva de indiferença ($TMgS_{c_sc_t}$) varia mais para a curva de indiferença em azul do que para a curva de indiferença em vermelho.

→ A elasticidade é maior para o indivíduo com curva de indiferença em azul.

Limite da elasticidade quando a diferença entre s e t torna-se arbitrariamente pequena (ou seja, substituição entre dois períodos arbitrariamente próximos):

$$-\frac{d[u'(c_s)/u'(c_t)]}{d[c_s/c_t]} \frac{c_s/c_t}{u'(c_s)/u'(c_t)} \rightarrow -\frac{c_t u'(c_t)}{u'(c_t)}, \quad s \rightarrow t \quad (2.19)$$

Que é a própria curvatura da função utilidade.

Equação de Euler

Portanto, a equação (2.18) pode ser interpretada como o **grau de intolerância do indivíduo a alterar seu consumo ao longo da vida**.

O inverso da curvatura é a **elasticidade de substituição intertemporal**:

$$\sigma(c) = -\frac{u'(c)}{cu''(c)}$$

Quanto mais tolerante o indivíduo a alterar o consumo ao longo da vida, menor a curvatura, e portanto maior a elasticidade de substituição intertemporal.

CRRA – Constant Relative Risk Aversion

Caso especial: CRRA – *Constant Relative Risk Aversion*.

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}, & \text{para } \gamma > 0 \text{ e } \gamma \neq 1 \\ \ln(c) & \text{para } \gamma = 1 \end{cases}$$

$$u'(c) = c^{-\gamma} \text{ e } u''(c) = -\gamma c^{-\gamma-1}$$

Curvatura:

$$-\frac{c_t u'(c_t)}{u'(c_t)} = -\frac{c(-\gamma)c^{-\gamma-1}}{c^{-\gamma}} = \gamma, \quad \sigma(c) = \frac{1}{\gamma}$$

Portanto, no caso CRRA, a elasticidade de substituição intertemporal é constante. Além disso:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} = \ln(c)$$

Equação de Euler

Pode-se reescrever a equação de Euler (2.17) da seguinte forma:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \sigma(c_t)[f'(k_t) - (\delta + n + \rho)] \quad (2.20)$$

Em que $\dot{c}_t/c_t$ é a taxa de crescimento do consumo *per capita*.

$f'(k_t)$: produtividade marginal do capital

$(\delta + n + \rho)$: custo de acumular capital (depreciação + espera)

Equação de Euler

Se $f'(k_t) > (\delta + n + \rho)$, o retorno de acumular capital é positivo, de modo que a trajetória de consumo é crescente, isto é, o consumo cresce ao longo do tempo;

→ retorno de acumular capital (dado pelo produto marginal) compensa o custo (dado pela depreciação e a impaciência);

→ consequentemente, há um incentivo para a poupar, postergando consumo, o qual apresenta uma trajetória ascendente.

Equação de Euler

À medida que o capital acumula, o produto marginal se reduz, diminuindo a diferença dentro do colchete de (2.20) e a subsequente taxa de crescimento do consumo.

→ taxa de crescimento se reduz ao longo do tempo e, no limite, a economia tende ao estado estacionário.

Quanto maior $\sigma(c)$, mais a taxa de crescimento do consumo responderá a diferenças entre o produto marginal e o termo de depreciação mais impaciência (maior será $\dot{c}_t/c_t$).

→ quanto mais tolerante o indivíduo a mudanças de consumo ao longo do tempo, mais rápida será a transição para o estado estacionário.

Equação de Euler

Se $f'(k_t) < (\delta + n + \rho)$, o retorno de acumular capital é negativo, de modo que não compensa o custo. A trajetória de consumo é decrescente.

→ desacumulação de capital ao longo do tempo.

→ antecipa-se consumo, o qual apresenta uma trajetória descendente.

→ o mesmo raciocínio com relação a $\sigma(c)$, e a velocidade de convergência, se aplica nesse caso.

Famílias

Firmas

Equilíbrio Geral

Dinâmica

Estado Estacionário

Sistema dinâmico de capital e consumo. As equações que caracterizam a solução do planejador central (excluindo-se, por enquanto, a condição de transversalidade) são:

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (\delta + n)k_t \quad (3.1)$$

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \sigma(c_t)[f'(k_t) - (\delta + n + \rho)] \quad (3.2)$$

Essas duas equações definem um sistema dinâmico em k e c . Mas antes de se avaliar a dinâmica, deve-se encontrar o **estado estacionário**, ou seja, a **situação em que as variáveis (em termos *per capita*) não crescem ao longo do tempo**.

$$c_t = c^*, k_t = k^*, y_t = y^*$$

ou

$$\dot{k}_t = 0 \text{ e } \dot{c}_t = 0$$

Estado Estacionário

Da equação (2.2), o estoque de capital *per capita* de estado estacionário é implicitamente dado por:

$$f'(k^*) = \delta + n + \rho \quad (3.3)$$

E, da equação (2.1), pode-se encontrar c^* implicitamente:

$$c^* = f(k^*) - (\delta + n)k^* \quad (3.4)$$

Regra de Ouro

No estado estacionário, a regra de ouro indica qual é o nível do estoque de capital *per capita* no estado estacionário que maximiza o consumo *per capita*. Trata-se do nível máximo de consumo que a família representativa consegue obter no longo prazo. Em estado estacionário, $\dot{k}_t = 0$, ou seja, $c = f(k) - (\delta + n)k$. Maximizando em relação a k , tem-se:

$$f'(k_g) = \delta + n$$

Em que k_g é o estoque de capital no estado estacionário associado à regra de ouro.

Comparando com o estoque de capital ótimo de estado estacionário, dado pela equação (3.3), tem-se que:

$$f'(k_g) = \delta + n < f'(k^*) = \delta + n + \rho$$

Regra de Ouro

Como a função de produção é côncava [$f''(k) < 0$], segue que:

$$f'(k^*) > f'(k_g) \Leftrightarrow k^* < k_g$$

Em outras palavras, **a solução do planejador central benevolente implica que o capital de estado estacionário é menor do que o capital da regra de ouro.**

- Maximizar consumo *per capita* de estado estacionário não é ótimo.
- Fazer isso envolveria custos, associados a postergar consumo ao longo do tempo.
- Esses custos são expressos pela taxa de impaciência (ρ), a qual é responsável pela diferença entre k^* e k_g .

Dinâmica

O estado estacionário é a tendência de longo prazo dessa economia.

A partir das equações a seguir, caracteriza-se essa dinâmica:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \sigma(c_t)[f'(k_t) - (\delta + n + \rho)] \quad (3.5)$$

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (\delta + n)k_t \quad (3.6)$$

Será construído o diagrama de fases no plano (c, k) .

Lembre-se que k é a variável de estado, ou seja, k_0 será a condição inicial no sistema acima.

Locus $\dot{c} = 0$

Com base na equação (53.), constrói-se o lócus $\dot{c}_t = 0$, isto é:

$$f'(k_t) = \delta + n + \rho$$

Em que, a partir da equação (3.3), implica que:

$$k_t = k^* \quad (\textit{locus } \dot{c} = 0)$$

No plano (c, k) , o *locus* $\dot{c} = 0$ é uma linha horizontal, cortando o eixo em k^* (Figura 2).

Locus $\dot{c} = 0$

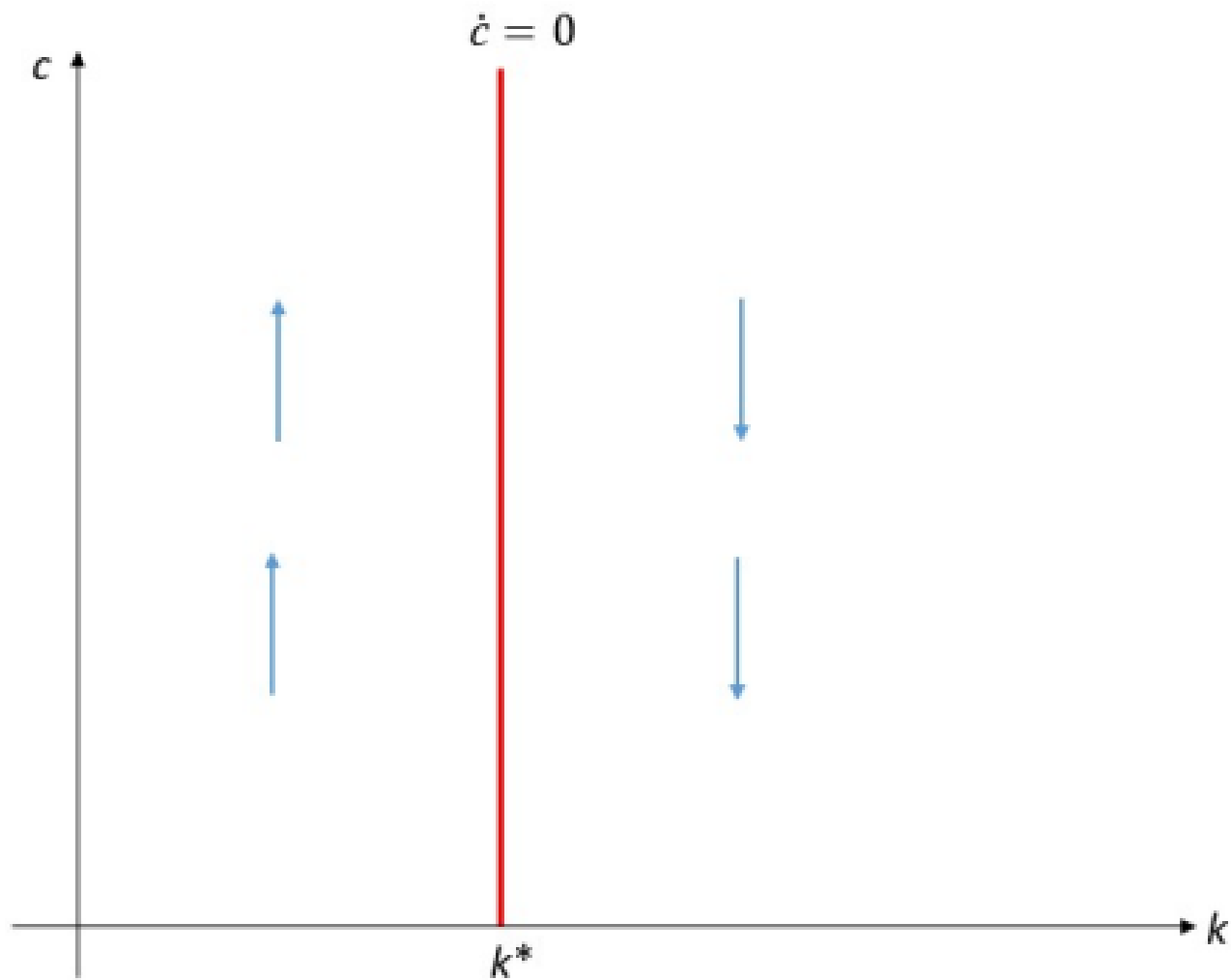
O que acontece à esquerda de $\dot{c} = 0$, ou seja, se $k < k^*$?

- Nesse caso, $f'(k) > f'(k^*) = \delta + n + \rho$. Ou seja, a expressão entre colchetes na equação (3.5) é positiva, o que implica que o consumo cresce ao longo do tempo (setas para cima na região à esquerda de $\dot{c} = 0$)

Analogamente, à direita de $\dot{c} = 0$, tem-se $f'(k) < f'(k^*)$ e consumo decrescente de acordo com a equação (3.5). As setas apontam para baixo nessa região.

Locus $\dot{c} = 0$

Figura 2



Locus $\dot{k} = 0$

Agora, deve-se ir para o locus $\dot{k}_t = 0$. Da equação (3.6), tem-se que:

$$c_t = f(k_t) - (\delta + n)k_t \quad (\text{Locus } \dot{k} = 0)$$

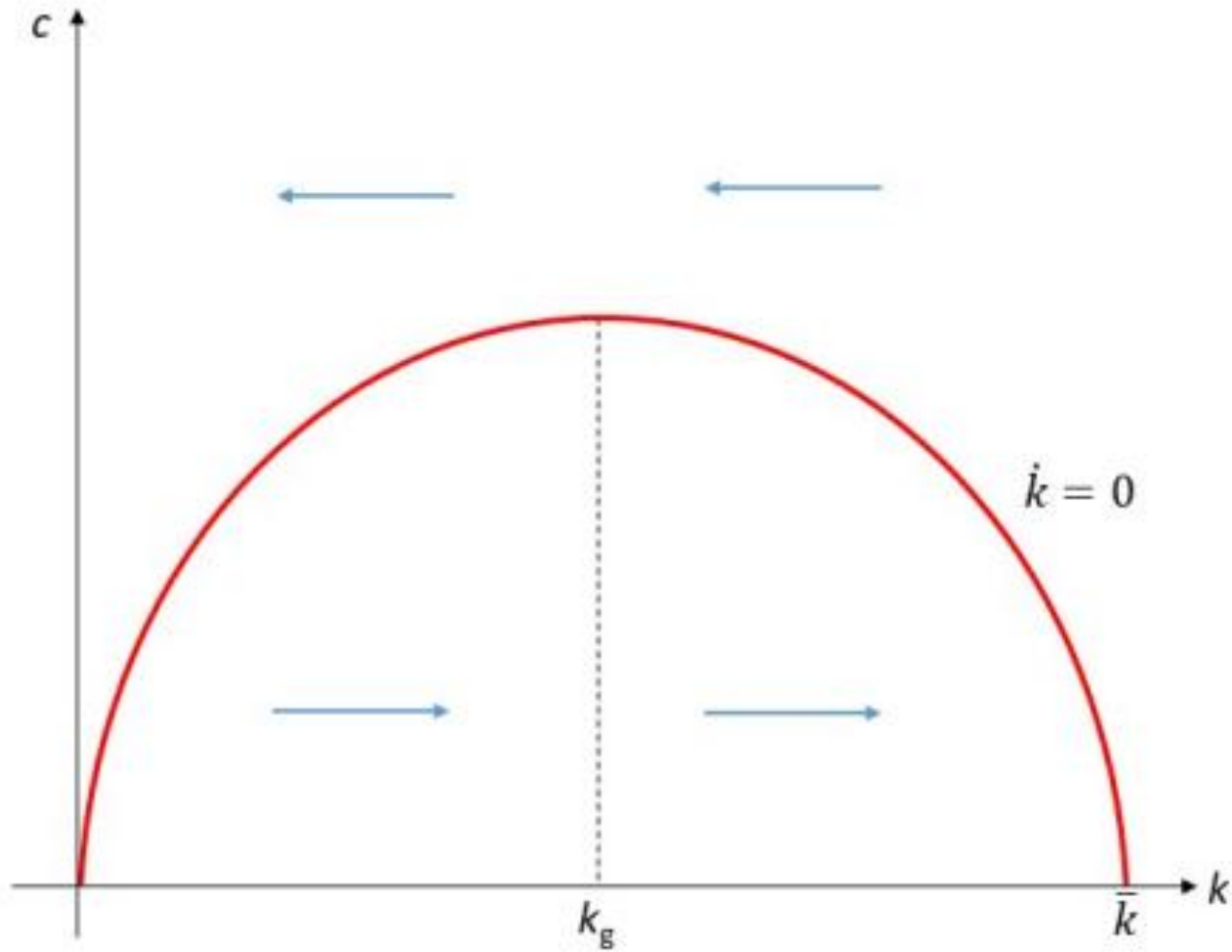
A inclinação no plano (c, k) é dada por:

$$\left. \frac{dc_t}{dk_t} \right|_{\dot{k}_t=0} = f'(k_t) - (\delta + n) \begin{cases} > 0, & \text{se } f'(k_t) > (\delta + n) & \Leftrightarrow k_t < k_g \\ = 0, & \text{se } f'(k_t) = (\delta + n) & \Leftrightarrow k_t = k_g \\ < 0, & \text{se } f'(k_t) < (\delta + n) & \Leftrightarrow k_t > k_g \end{cases}$$

Ou seja, a curva é descrita por um “U” invertido, e alcança o máximo justamente no capital per capita da regra de ouro (ver Figura 3)

Locus $\dot{k} = 0$

Figura 3



Locus $\dot{k} = 0$

O que ocorre acima de $\dot{k} = 0$?

- Considere inicialmente um ponto qualquer no *locus*, e promova um aumento em c para dado k .
- De acordo com a equação (3.6), isso fará com que $\dot{k}$ torne-se negativo. Em outras palavras, pontos acima do *locus*, estão associados a reduções em k , o que explica a seta para esquerda nessa região da figura.

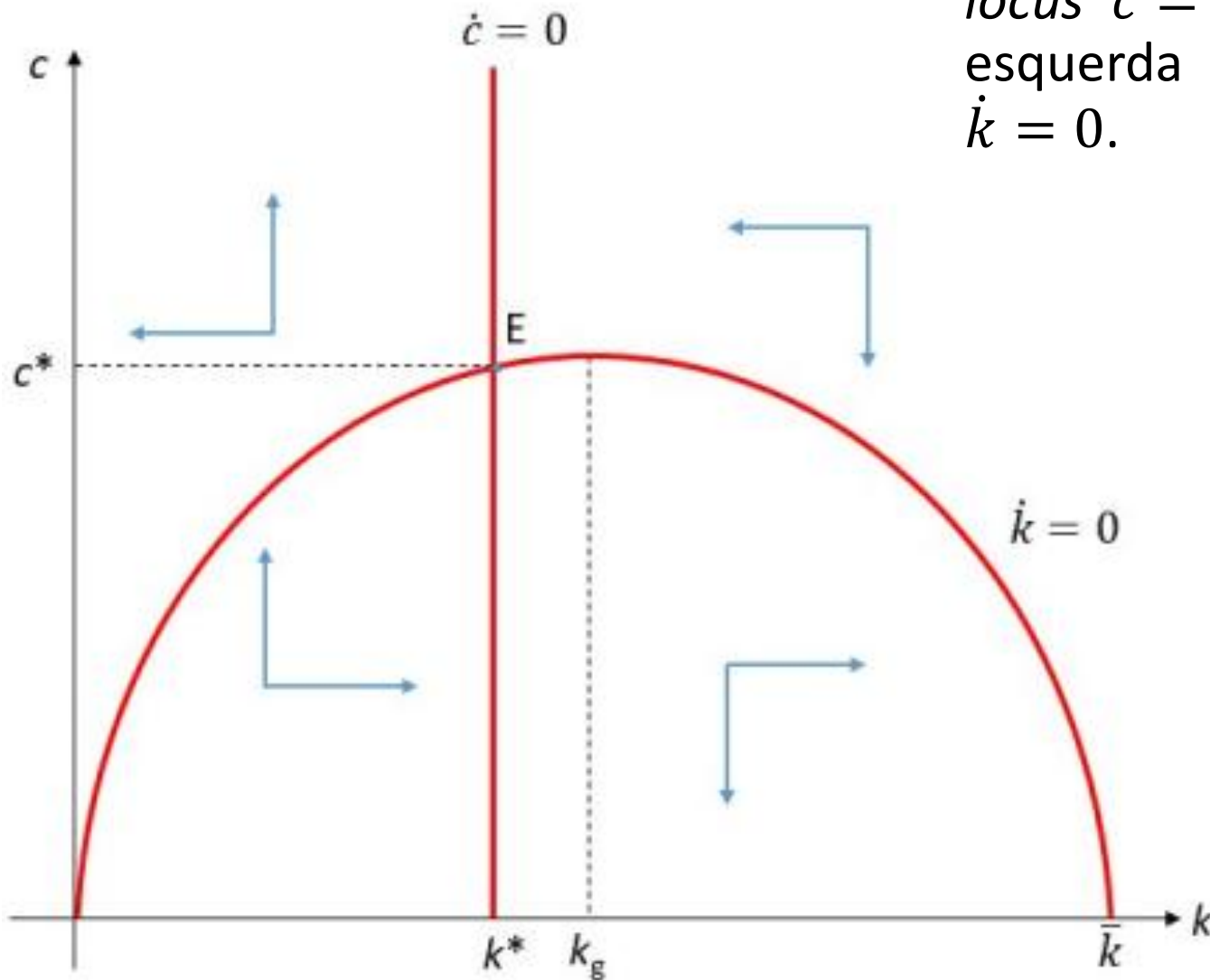
Da mesma forma, iniciando em um ponto qualquer do locus, e reduzindo de c para dado k , tem-se $\dot{k}$ positivo.

- Logo, abaixo do *locus* as setas apontam para a direita.

Juntando os locus $\dot{k}_t = 0$ e $\dot{c}_t = 0$, tem-se o diagrama de fases.

Diagrama de Fases

Figura 4



Uma vez que $\rho - n > 0$, o *locus* $\dot{c} = 0$ está localizado à esquerda do pico do *locus* $\dot{k} = 0$.

Diagrama de Fases

Figura 5

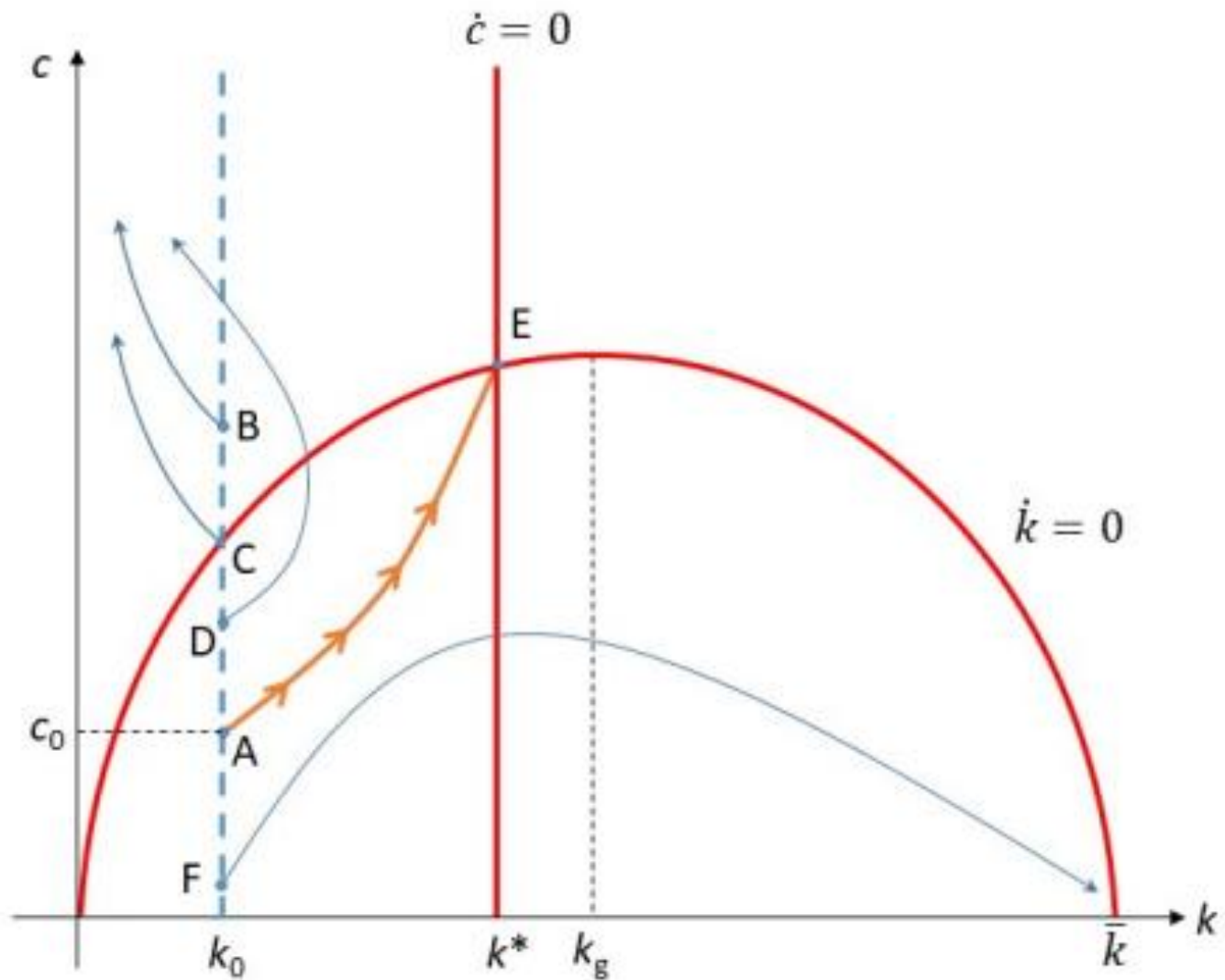


Diagrama de Fases

O estoque inicial de capital $k_0 > 0$ define a condição inicial do sistema. A trajetória ótima é mostrada em cor laranja. Ela é única e estável, convergindo para o estado estacionário (ponto E) ao longo do tempo.

- um ponto importante: k_0 é dado, ou seja, a variável capital não pode ser alterada em $t = 0$. mas o consumo pode, e seu nível inicial c_0 irá determinar a trajetória futura das variáveis k_t e c_t .

Assim, o nível de c_0 mostrado na trajetória ótima (ponto A) é tal que se alcance o estado estacionário no longo prazo.

- considere, assim, valores alternativos de c_0 e será mostrado que esses valores levam a trajetórias não ótimas.
- Para explicar a dinâmica, considere $k_0 < k^*$.

Diagrama de Fases

Suponha c_0 na região acima da curva $\dot{k}_t = 0$ (ponto B), por exemplo. Nessa região, o consumo é crescente e o capital é decrescente; o capital vai para zero ao longo do tempo.

- o mesmo vale para c_0 exatamente sobre a curva $\dot{k}_t = 0$ (ponto C).

Considere agora c_0 um pouco abaixo do *locus* $\dot{k}_t = 0$ (ponto D).

- Nessa região, consumo e capital crescem ao longo do tempo.
- Como o ponto inicial é próximo ao locus, a trajetória eventualmente cruza essa curva, e passa a ser regida novamente pela dinâmica da região acima de $\dot{k}_t = 0$, em que o consumo aumenta e o capital declina no tempo.

Isso será válido para qualquer ponto iniciando acima do ponto A:

- Haverá uma fase em que consumo e capital crescem, mas a trajetória acaba cruzando o locus $\dot{k}_t = 0$ e, então, entra-se em uma dinâmica de desacumulação de capital.

Diagrama de Fases

As trajetórias que se iniciam acima do ponto A não são ótimas, pois nelas o estoque de capital será nulo em um ponto finito no tempo $T > 0$. Isso implica que, para $t > T$, $k_t = y_t = c_t = 0$. Diferencie novamente no tempo a equação (3.6):

$$\ddot{k}_t = [f'(k_t) - (\delta + n)]\dot{k}_t - \dot{c}_t$$

Note que essas trajetórias estão com estoque de capital sempre abaixo da regra de ouro, de modo que, ao longo delas, $f'(k_t) - (\delta + n) > 0$. Quando alcançam a região acima do locus $\dot{k}_t = 0$, passam a apresentar capital decrescente e consumo crescente, ou seja, $\dot{k}_t < 0$ e $\dot{c}_t > 0$.

- Isso implica que, quando atingem essa região, tais trajetórias apresentam $\ddot{k}_t < 0$, ou seja, o estoque de capital é decrescente a taxas crescentes.
- Em outras palavras, o capital se extingue em um ponto finito no tempo, e passa a ser nulo a partir desse ponto.

Diagrama de Fases

Note que a equação de Euler é violada nessas condições, resultando que tais trajetórias não podem ser ótimas. Reproduzindo a equação (5), avaliada no instante T:

$$\dot{c}_T = c_T \sigma(c_T) [f'(k_T) - (\delta + n + \rho)]$$

O consumo segue trajetória crescente antes de T e, em T, cai para zero de forma descontínua. Isso implica que $\dot{c}_T = -\infty$.

O lado direito do gráfico não pode ser negativo em T, pois $f'(0) = \infty$. Portanto, nessas trajetórias a equação de Euler não é satisfeita em T, de modo que essas trajetórias não podem ser ótimas.

Descarta-se, dessa forma, todas as trajetórias iniciadas acima do ponto A.

Diagrama de Fases

Trajetórias começando abaixo do Ponto A, por exemplo, no ponto F.

- No início, estoque de capital e consumo crescem.
- Porém, como o consumo inicial não é alto o suficiente, a trajetória não alcança o estado estacionário, e cruza para a região em que o estoque de capital aumenta e o consumo decresce.
- Converge para o ponto X no longo prazo, onde o estoque de capital é igual a $\bar{k}$ e o consumo irá para zero.

Trajetórias desse tipo não são ótimas, pois violam a condição de transversalidade. Considere o limite, com $k \rightarrow \bar{k}$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} u'(c_t) k_t = \bar{k} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} u'(c_t)$$

Como $c_t \rightarrow 0$, então $u'(c_t) \rightarrow \infty$.

Dado que $e^{-\rho t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, o limite acima só será igual a zero se a utilidade marginal do consumo for para infinito a uma taxa mais lenta que ρ (que é a taxa de decrescimento de $e^{-\rho t}$).

Diagrama de Fases

Para calcular a taxa de crescimento de $u'(c_t)$ quando c_t vai para zero, considere a equação de Euler:

$$\left[-\frac{u''(c_t)}{u'(c_t)} \right] \dot{c}_t = f'(k_t) - (\delta + n + \rho)$$

A taxa de crescimento da utilidade marginal será dada por:

$$\frac{d \ln[u'(c_t)]}{dt} = \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)} \dot{c}_t$$

Logo:

$$\frac{d \ln[u'(c_t)]}{dt} = \rho - [f'(k_t) - (\delta + n)]$$

Como, ao longo dessas trajetórias, $k_t \rightarrow \bar{k} > k_g$, então $f'(k_t) \rightarrow f'(\bar{k}) < \delta + n$.

Diagrama de Fases

No limite, o termo entre colchetes acima é negativo, de modo que:

$$\frac{d \ln[u'(c_t)]}{dt} \rightarrow \rho - [f'(\bar{k}) - (\delta + n)] > \rho$$

Portanto, ao longo dessas trajetórias, a utilidade marginal do consumo crescerá a uma taxa maior do que ρ no longo prazo, de modo que o limite abaixo não será igual a zero.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} u'(c_t) k_t = \bar{k} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} u'(c_t) \neq 0$$

Violando a condição de transversalidade.

Linearização

Será feito agora uma aproximação linear do sistema dinâmico em torno do estado estacionário. Isso permite encontrar analiticamente a trajetória ótima aproximada.

Considere novamente o sistema dinâmico em c e k :

$$\dot{c}_t = c_t \sigma(c_t) [f'(k_t) - (\delta + n + \rho)]$$

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (\delta + n)k_t$$

Será realizada uma aproximação de Taylor de primeira ordem (linear) no sistema acima, em torno dos valores de estado estacionário c^* e k^* .

Linearização

Para a primeira equação, tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{c}_t &\approx c^* \sigma(c^*) [f'(k^*) - (\delta + n + \rho)] \\ &+ [\sigma(c^*) + c^* \sigma'(c^*)] \{f'(k^*) - (\delta + n + \rho)\} (c_t - c^*) \\ &+ c^* \sigma(c^*) f''(k^*) (k_t - k^*)\end{aligned}$$

De (3.3), segue que $f'(k^*) = \delta + n + \rho$, o que implica que os dois primeiros termos do lado direito acima são nulos. Logo:

$$\dot{c}_t \approx c^* \sigma(c^*) f''(k^*) (k_t - k^*)$$

Linearizando agora a segunda equação do sistema:

$$\begin{aligned}\dot{k}_t &\approx [f(k^*) - (\delta + n + \rho)] - (c_t - c^*) + [f'(k^*) - (\delta + n)] (k_t - k^*)\end{aligned}$$

Em que o primeiro termo do lado direito é nulo por (3.4), e $f'(k^*) - (\delta + n) = \rho$ por (3.3). Logo:

$$\dot{k}_t \approx -(c_t - c^*) + \rho (k_t - k^*)$$

Linearização

O sistema dinâmico linearizando em torno do estado estacionário é então dado pelas seguintes equações:

$$\dot{c}_t \approx c^* \sigma(c^*) f''(k^*) (k_t - k^*)$$

$$\dot{k}_t \approx -(c_t - c^*) + \rho(k_t - k^*)$$

Reescrevendo na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{c}_t \\ \dot{k}_t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & c^* \sigma(c^*) f''(k^*) \\ -1 & \rho \end{bmatrix}}_{\equiv B} \begin{bmatrix} (c_t - c^*) \\ (k_t - k^*) \end{bmatrix}$$

A solução da trajetória ótima (para o estoque de capital) é dada por:

$$k_t = A_0 + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

Em que λ_1 e λ_2 são os autovalores associados à matriz B , ao passo que A_0 , A_1 e A_2 são constantes a serem determinadas.

Linearização

Os autovalores λ_1 e λ_2 são encontrados a partir da seguinte equação:

$$\det(B - \lambda I) = 0$$

Ou

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & c^* \sigma(c^*) f''(k^*) \\ -1 & \rho - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$-\lambda(\rho - \lambda) + c^* \sigma(c^*) f''(k^*) = 0$$

$$\lambda^2 - \rho\lambda - M = 0 \quad (3.8)$$

Em que:

$$M = -c^* \sigma(c^*) f''(k^*) > 0, \text{ pois } f''(k^*) < 0.$$

Linearização

A solução da equação (3.8) é:

$$\lambda = \frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4M}}{2}$$

Os autovalores são, então:

$$\lambda_1 = \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 + 4M}}{2} > 0$$

$$\lambda_2 = \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 + 4M}}{2} < 0$$

Em que λ_2 é negativo pois $\sqrt{\rho^2 + 4M} > \sqrt{\rho^2} = \rho$

Falta determinar os coeficientes A_0 , A_1 e A_2 em (3.7)

Linearização

Note que, como $\lambda_1 > 0$, então A_1 terá que ser igual a zero.

- Se $A_1 < 0$, então $k_t \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \infty$
 - Corresponde às trajetórias em que o consumo cresce e o capital decresce no diagrama de fases (iniciando acima do ponto A).
 - Como essas trajetórias não são ótimas, A_1 não pode ser negativo.
- Se $A_1 > 0$, então $k_t \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow \infty$
 - Corresponde às trajetórias em que o capital cresce e o consumo decresce no diagrama de fases (iniciando abaixo do ponto A).
 - Como essas trajetórias não são ótimas, A_1 não pode ser positivo.

Logo, a única situação que é consistente com um estado estacionário no longo prazo é $A_1 = 0$.

Linearização

Resta determinar os coeficientes A_0 e A_2 . Para isso, deve-se usar duas condições:

- A condição inicial $k_t = k_0$ em $t = 0$, a qual implica que:

$$k_0 = A_0 + A_2 e^{0 \cdot \lambda_2} = A_0 + A_2$$

- A condição final $k_t \rightarrow k^*$ quando $t \rightarrow \infty$, a qual implica que:

$$k^* = \lim_{t \rightarrow \infty} k_t = A_0 + A_2 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_2 t} = A_0, \text{ pois } \lambda_2 < 0$$

As duas equações acima implicam que:

$$A_0 = k^*$$

$$A_2 = -(k^* - k_0)$$

Trajetória Ótima

A trajetória ótima do capital, em torno do estado estacionário, é então dada por:

$$k_t = k^* - (k^* - k_0)e^{\lambda_2 t}$$

Em que:

$$\lambda_2 = \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 + 4M}}{2}$$

$$M = -c^* \sigma(c^*) f''(k^*)$$

Velocidade de Convergência

A velocidade de convergência é dada por $|\lambda_2|$

→ Quanto maior for $|\lambda_2|$, mais rápido $e^{\lambda_2 t}$ converge para zero, e k_t converge para k^* .

Reescrevendo, supondo preferências do tipo CRRA, isto é, $\sigma(c^*) = 1/\gamma$:

$$|\lambda_2| = \frac{\sqrt{\rho^2 + \frac{4c^*|f''(k^*)|}{\gamma}} - \rho}{2}$$

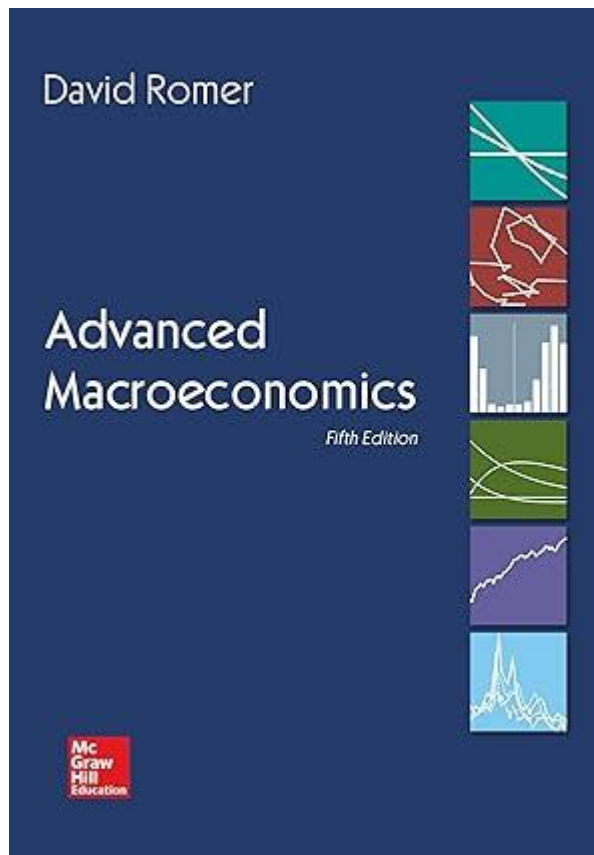
Note que, quanto maior o parâmetro γ (ou seja, menor a elasticidade de substituição intertemporal), menor a velocidade de convergência.

→ se γ é elevado, a família representativa é muito intolerante a mudar consumo ao longo da vida.

→ consequentemente, a economia convergirá de maneira mais lenta para o estado estacionário.

Referência bibliográfica

Capítulo 2



RODRIGUES, M. **Curso de Teoria Macroeconômica**. Notas de Aulas. Universidade de São Paulo, 2021.

IMORI, P. Notas de aulas. 2021.

Obrigado!

Contato:

PROF. DR. SÉRGIO RICARDO DE BRITO GADELHA

E-mail: sergio.gadelha@idp.edu.br e professor.sergio.Gadelha@gmail.com

Sítio eletrônico: <https://sergiorbgadelha.com.br/>

Apêndice: Função de Utilidade de Aversão ao Risco Relativa Constante

Exemplo

Problema da família representativa: maximizar sua utilidade intertemporal

$$U = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho' t} u(C(t)) dt$$

Onde $\rho' \equiv \rho - n$;

Uma vez que $L(t) = L(0)e^{nt}$, essa expressão é igual a expressão na equação (2.1) dividida por $L(0)/H$ e, portanto, tem as mesmas implicações para o comportamento.

Exemplo

Problema da família representativa: maximizar sua utilidade intertemporal

$$U = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} u(C(t)) \frac{L(t)}{H} dt \quad (E.1)$$

Uma vez que $L(t) = L(0)e^{nt}$, essa expressão é igual a expressão na equação (2.1) dividida por $L(0)/H$ e, portanto, tem as mesmas implicações para o comportamento.

Exemplo

Considera-se a seguinte **função de utilidade instantânea**:

$$u(C(t)) = \frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta} \quad (E.2)$$

$$\theta > 0,$$

$$\rho - n - (1 - \theta)g > 0 \quad (E.3)$$

Trata-se de uma **função utilidade de aversão ao risco relativa constante – CRRA**.

Essa forma funcional é necessária para a economia convergir para uma trajetória de crescimento equilibrado.

Essa função é côncava se, e somente se, $\theta \geq 0$.

Exemplo

O parâmetro θ é o **coeficiente de aversão ao risco relativa**, a qual independe de C por ser definida da seguinte forma:

$$-\frac{Cu''(C)}{u'(C)} = \theta$$

- O parâmetro θ determina o desejo de uma família em mudar o consumo entre períodos. Em outras palavras, esse parâmetro mensura a atitude individual em relação ao risco.
- A elasticidade de substituição intertemporal entre consumo em dois pontos no tempo é $1/\theta$:

$$\frac{u'(c_t)}{u''(c_{t+j})} = \frac{p_t}{p_{t+j}}$$

Exemplo

A elasticidade de substituição intertemporal entre consumo em dois pontos no tempo é $1/\theta$:

$$\left(\frac{c_t}{c_{t+j}}\right)^{-\theta} = \frac{p_t}{p_{t+j}}$$

Ou

$$-\frac{\partial \left(\frac{c_t}{c_{t+j}}\right) / \left(\frac{c_t}{c_{t+j}}\right)}{\partial \left(\frac{p_t}{p_{t+j}}\right) / \left(\frac{p_t}{p_{t+j}}\right)} = \frac{1}{\theta}$$

Exemplo

Quanto menor for o θ , mais devagar a utilidade marginal decresce à medida que o consumo aumenta, e, portanto mais disposta estará a família em permitir que seu consumo varie ao longo do tempo, isto é, maior a disposição da família em tolerar mudanças no consumo entre períodos.

Se θ estiver perto de zero, então a utilidade é quase linear em C e, portanto, a família estará disposta a aceitar grandes mudanças em seu consumo para tomar vantagem de pequenas diferenças entre sua taxa de desconto e a taxa de retorno que é dada em sua poupança.

A elasticidade de substituição entre consumo em qualquer dois pontos no tempo é dada por: $1/\theta$

Exemplo

$C(t)^{1-\theta}$ é crescente em C se $\theta < 1$;

$C(t)^{1-\theta}$ é decrescente em C se $\theta > 1$;

$C(t)^{1-\theta}/1 - \theta$ assegura que a utilidade marginal do consumo é positiva independente do valor de θ ;

No caso de $\theta \rightarrow 1$, a função utilidade instantânea simplifica-se para $\ln C$

Exemplo

A hipótese de que $\rho - n - (1 - \theta)g > 0$ assegura que a família não pode obter a utilidade ao longo da vida de maneira infinita. Isto é, a utilidade ao longo da vida não diverge.

Se essa condição não ocorre, a família pode obter utilidade infinita ao longo da vida, e seu problema de maximização pode não ter uma solução bem-definida.

Exemplo

Se a taxa de juros for constante em todos os períodos de tempo, então:

$$R(t) = \int_{i=0}^t r(i) di \quad (E.4)$$

Exemplo

Restrição orçamentária: o consumo intertemporal das famílias, deve ser menor ou igual que sua renda intertemporal (ambos trazidos a valor presente), que é dada pelo estoque de capital (no instante zero) e seus salários (também trazidos a valor presente):

$$\underbrace{\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} C(t) \frac{L(t)}{H} dt}_{\text{Consumo Intertemporal}} \leq \underbrace{\frac{K(0)}{H}}_{\text{estoque de capital}} + \underbrace{\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} A(t)w(t) \frac{L(t)}{H} dt}_{\text{salário das famílias}} \quad (E.5)$$

Exemplo

Transformações a serem feitas!

(1) Deve-se transformar os valores relativos às famílias em valores intensivos:

$$C(t) = c(t)A(t)$$

$$K(0) = k(0)A(0)L(0)$$

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} c(t)A(t) \frac{L(t)}{H} dt \leq \frac{k(0)A(0)L(0)}{H} + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} A(t)w(t) \frac{L(t)}{H} dt \quad (E.6)$$

Exemplo

(2) Multiplica-se todos os termos por $(H/A(0)L(0))$:

$$\begin{aligned} & \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} c(t) A(t) \frac{L(t)}{H} \frac{H}{A(0)L(0)} dt \\ & \leq \frac{k(0)A(0)L(0)}{H} \frac{H}{A(0)L(0)} + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} A(t)w(t) \frac{L(t)}{H} \frac{H}{A(0)L(0)} dt \end{aligned}$$

Taxa de crescimento da tecnologia: g

Taxa de crescimento da população: n

Exemplo

$$\frac{A(t)}{A(0)} = e^{nt} \Rightarrow A(t) = A(0)e^{nt}$$

$$\frac{L(t)}{L(0)} = e^{gt} \Rightarrow L(t) = L(0)e^{gt}$$

$$\begin{aligned} & \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} c(t) \frac{A(t)}{A(0)} \frac{L(t)}{L(0)} \frac{H}{H} dt \\ & \leq k(0) \left[\frac{A(0)}{A(0)} \frac{L(0)}{L(0)} \frac{H}{H} \right] + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} \frac{A(t)}{A(0)} \frac{L(t)}{L(0)} \frac{H}{H} w(t) dt \end{aligned}$$

Exemplo

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} c(t) e^n e^g \underbrace{\frac{H}{H}}_{=1} dt \leq k(0) \underbrace{\left[\frac{A(0)}{A(0)} \frac{L(0)}{L(0)} \frac{H}{H} \right]}_{=1} + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} e^n e^g \underbrace{\frac{H}{H}}_{=1} w(t) dt$$

Restrição orçamentária: consumo intertemporal da família (trazido a valor presente) deve ser menor ou igual a sua renda intertemporal, que é dado pelo estoque de capital no instante zero e o salário (trazido a valor presente):

$$\underbrace{\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} c(t) e^{(n+g)t} dt}_{\text{consumo intertemporal}} \leq k(0) + \underbrace{\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} w(t) e^{(n+g)t} dt}_{\text{renda intertemporal}} \quad (E.7)$$

Exemplo

Por exemplo:

$$\frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta} = \frac{[A(t)c(t)]^{1-\theta}}{1-\theta} = \frac{[A(0)e^{gt}]^{1-\theta} C(t)^{1-\theta}}{1-\theta} \quad (E.8)$$

$$U = A(0)^{1-\theta} \frac{L(0)}{H} \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} e^{(1-\theta)gt} e^{nt} \frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta} dt \quad (E.9)$$

$$B \equiv A(0)^{1-\theta} \frac{L(0)}{H}; \quad \beta \equiv \rho - n - (1-\theta)g \quad (E.10)$$

$$\Rightarrow U = B \int_{t=0}^{\infty} \frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta} e^{-\beta t} dt \quad (E.11)$$

Exemplo

Por exemplo:

$$\mathcal{L} = B \int_{t=0}^{\infty} \frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta} e^{-\beta t} dt + \lambda \left\{ K(0) + \int_{t=0}^{\infty} e^{(n+g)t-R(t)} [w(t) - c(t)] \right\} dt \quad (E.12)$$

$$c(t): B e^{-\beta t} c(t)^{-\theta} - \lambda e^{(n+g)t-R(t)} = 0 \quad (E.13)$$

$$\ln B - \beta t - \theta \ln c(t) = \ln \lambda + (n+g)t - R(t) \quad (E.14)$$

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{r(t) - n - g - \beta}{\theta} = \frac{r(t) - \rho - \theta g}{\theta} \quad (E.15)$$

Exemplo

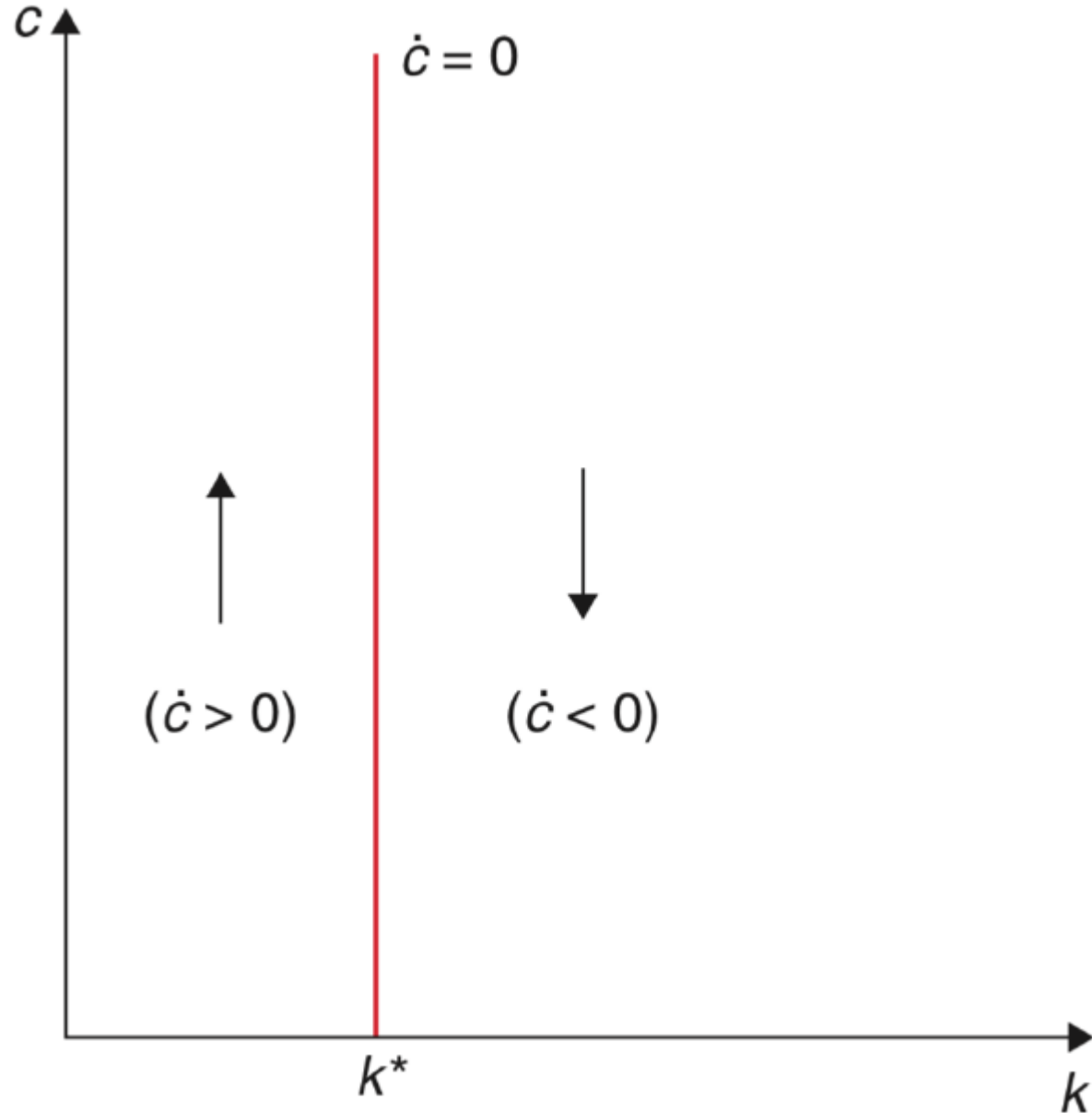
Teremos equações de movimento para $c(t)$ e $k(t)$:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{f'(k(t)) - \rho - \theta g}{\theta} \quad (E.16)$$

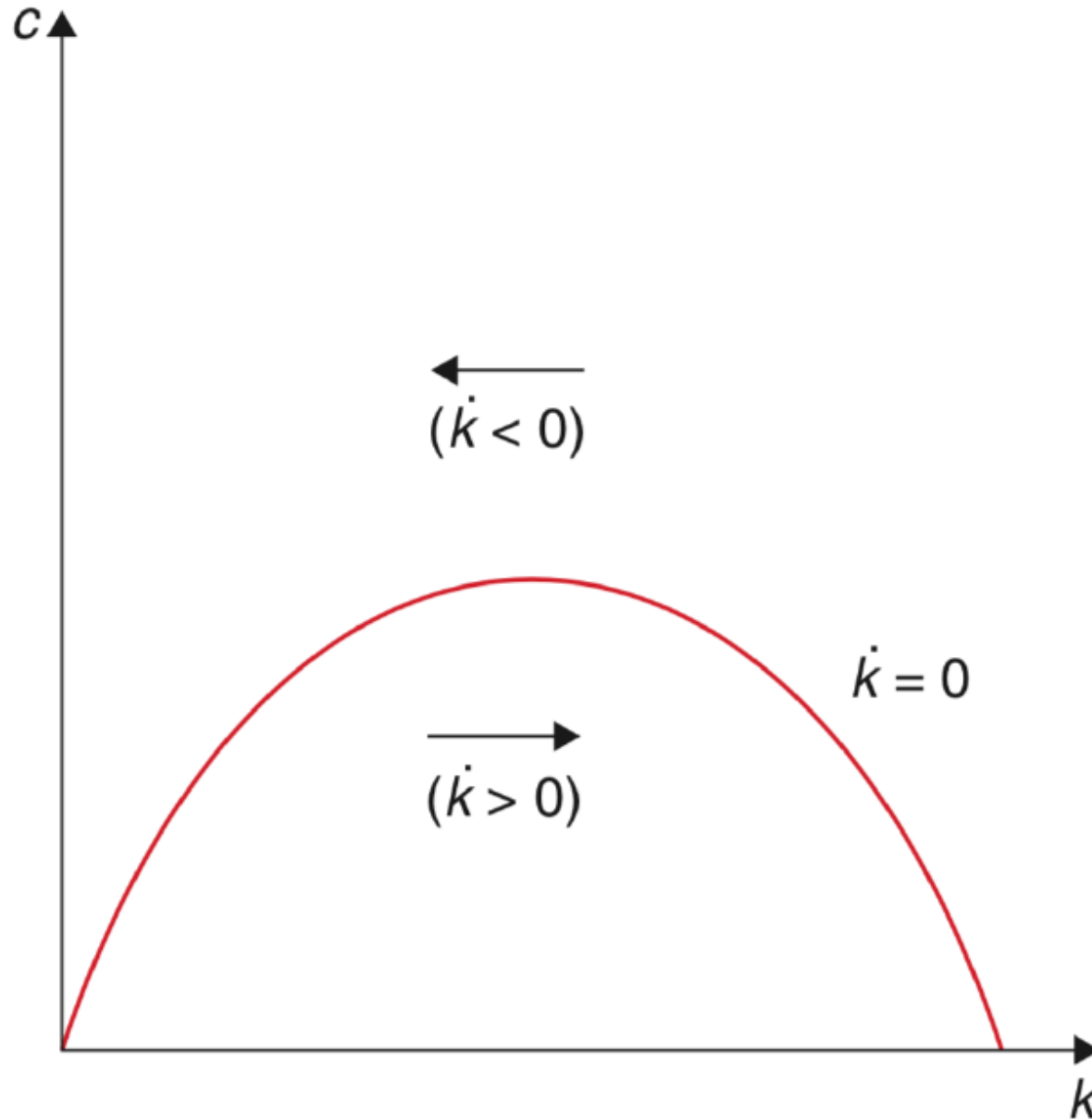
$$\dot{k}(t) = sy(t) - (n + g)k(t) = f(k(t)) - c(t) - (n + g)k(t) \quad (E.17)$$

Pode-se representar no plano $k \times c$

Locus $\dot{c} = 0$ (Dinâmica do Consumo)



Locus $\dot{k} = 0$ (Dinâmica do Capital)



Exemplo

No estado estacionário, $\dot{c}(t) = 0$ e $\dot{k}(t) = 0$:

$$f'(k(t)) = \rho + \theta g \quad (E.18)$$

$$f(k(t)) - (n + g)k(t) = c(t) \quad (E.19)$$

Estado Estacionário

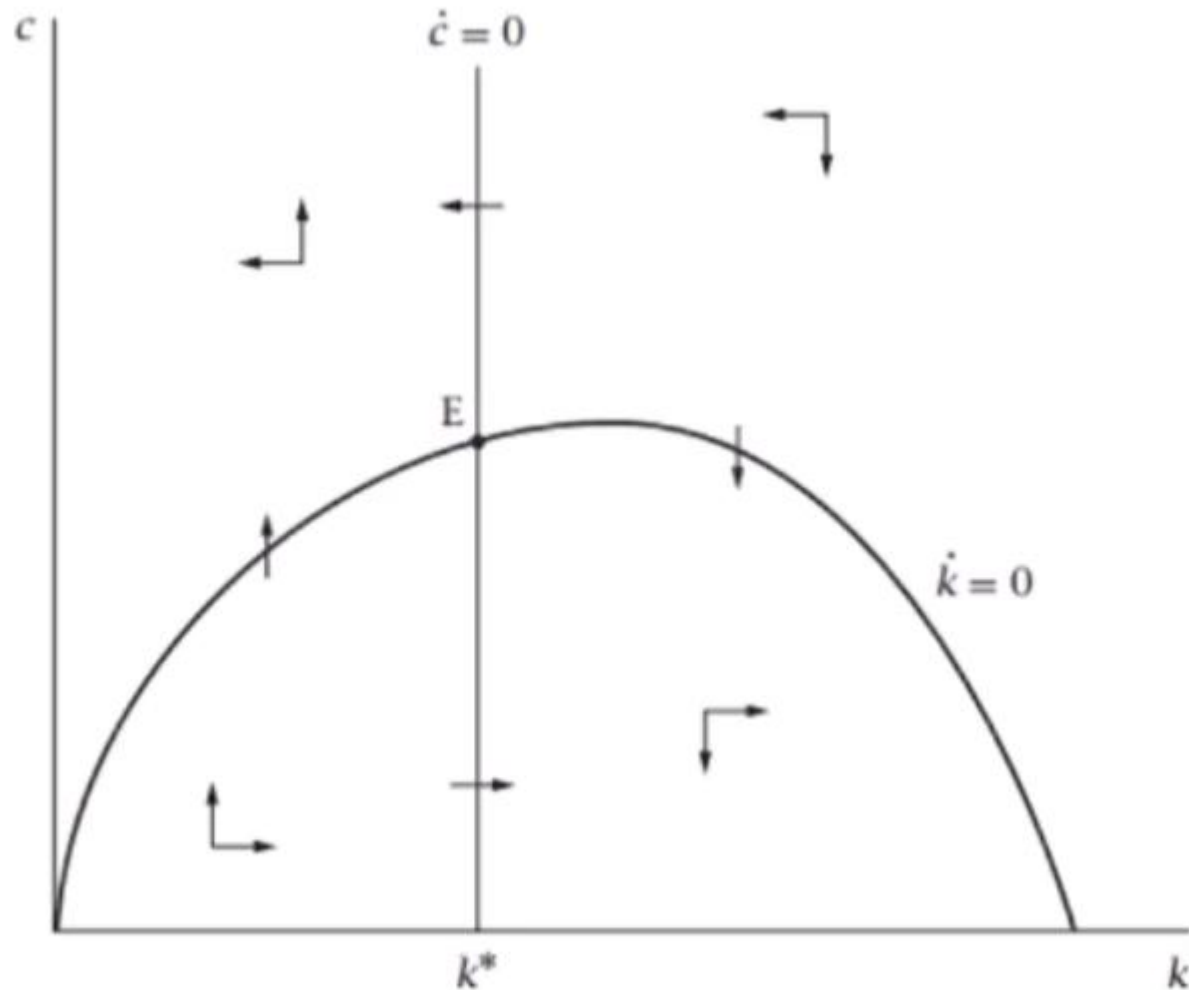
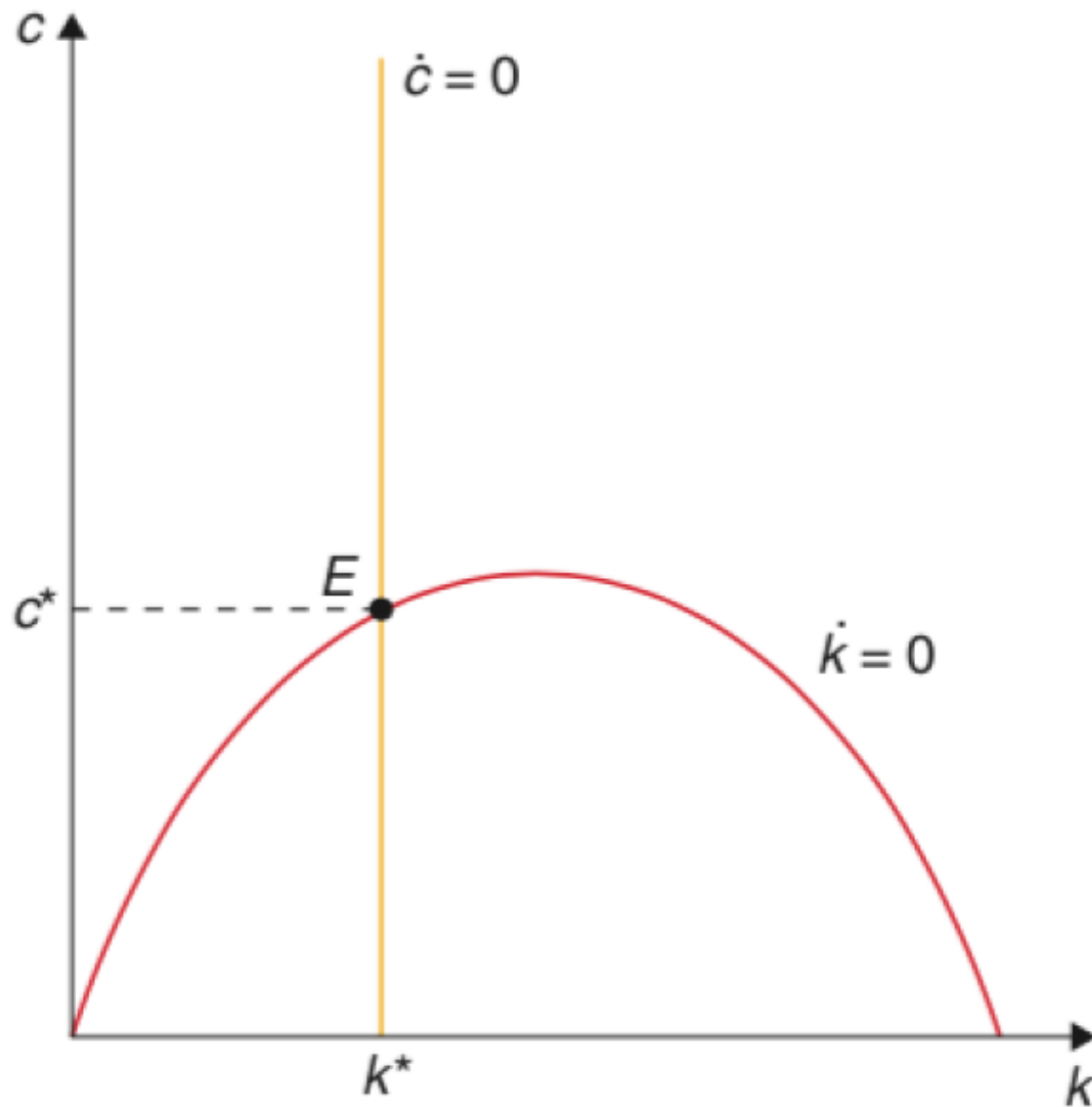


Figura 1: Diagrama de Fases: Consumo e Capital. Fonte: Romer (1996)

Estado Estacionário



Exemplo

- Observe que a poupança ótima no modelo de Ramsey-Cass-Koopmans é menor que a poupança da regra de ouro no modelo de Solow-Swan.

- Regra de Ouro: $PMgK = n + g$

- Equação de Euler: $PMgK = \rho + \theta g$

- Uma vez que $\rho - n - (1 - \theta)g > 0$, então $\rho + \theta g > n + g$

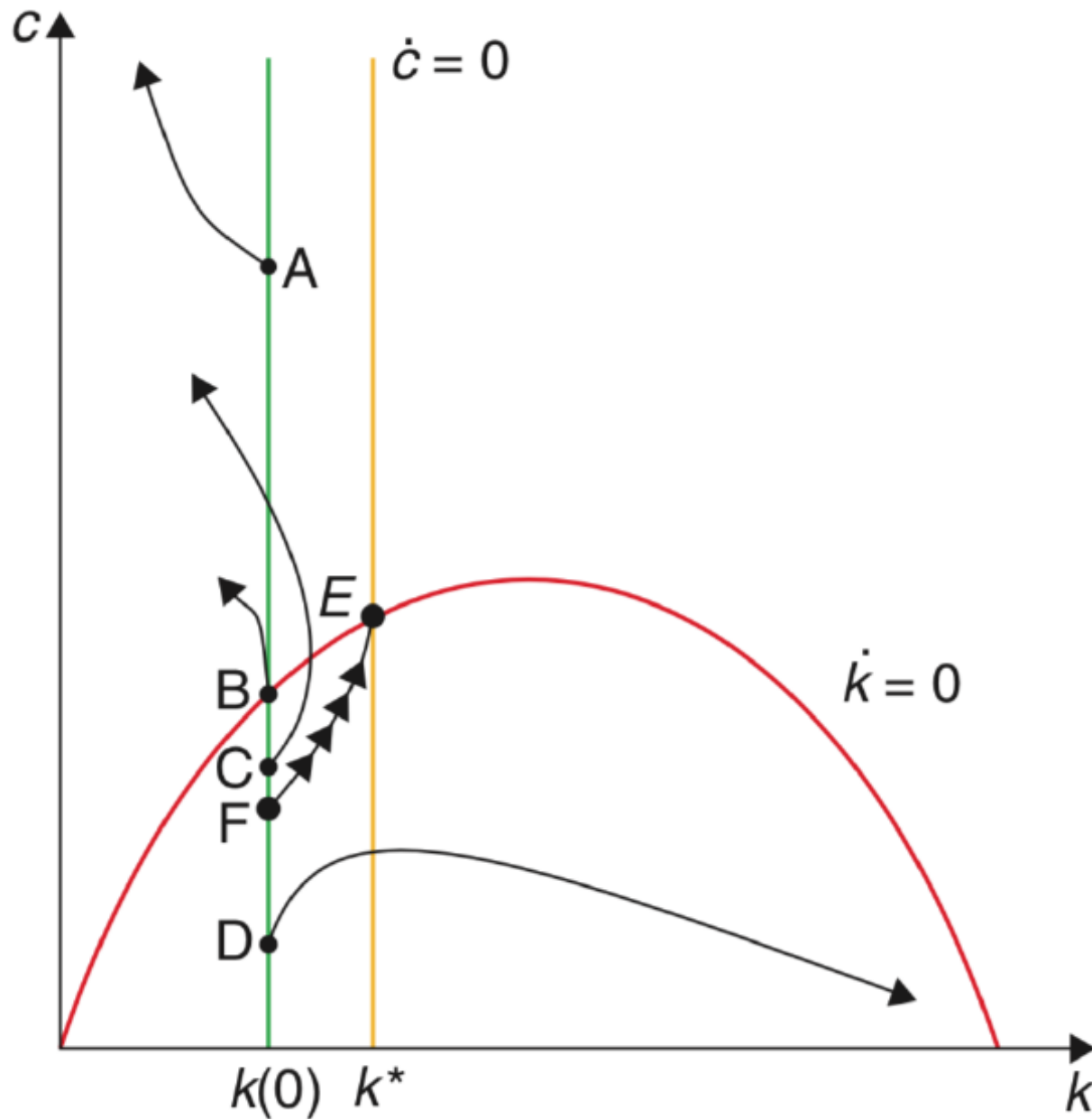
Exemplo

- Consumo total não é máximo;
- Utilidade do consumo é máxima: agentes possuem impaciência e desejam ter maior consumo no presente.
- Regra de poupança conforme Ramsey-Cass-Koopmans é chamado de **Regra de Ouro Modificada** por alguns autores.

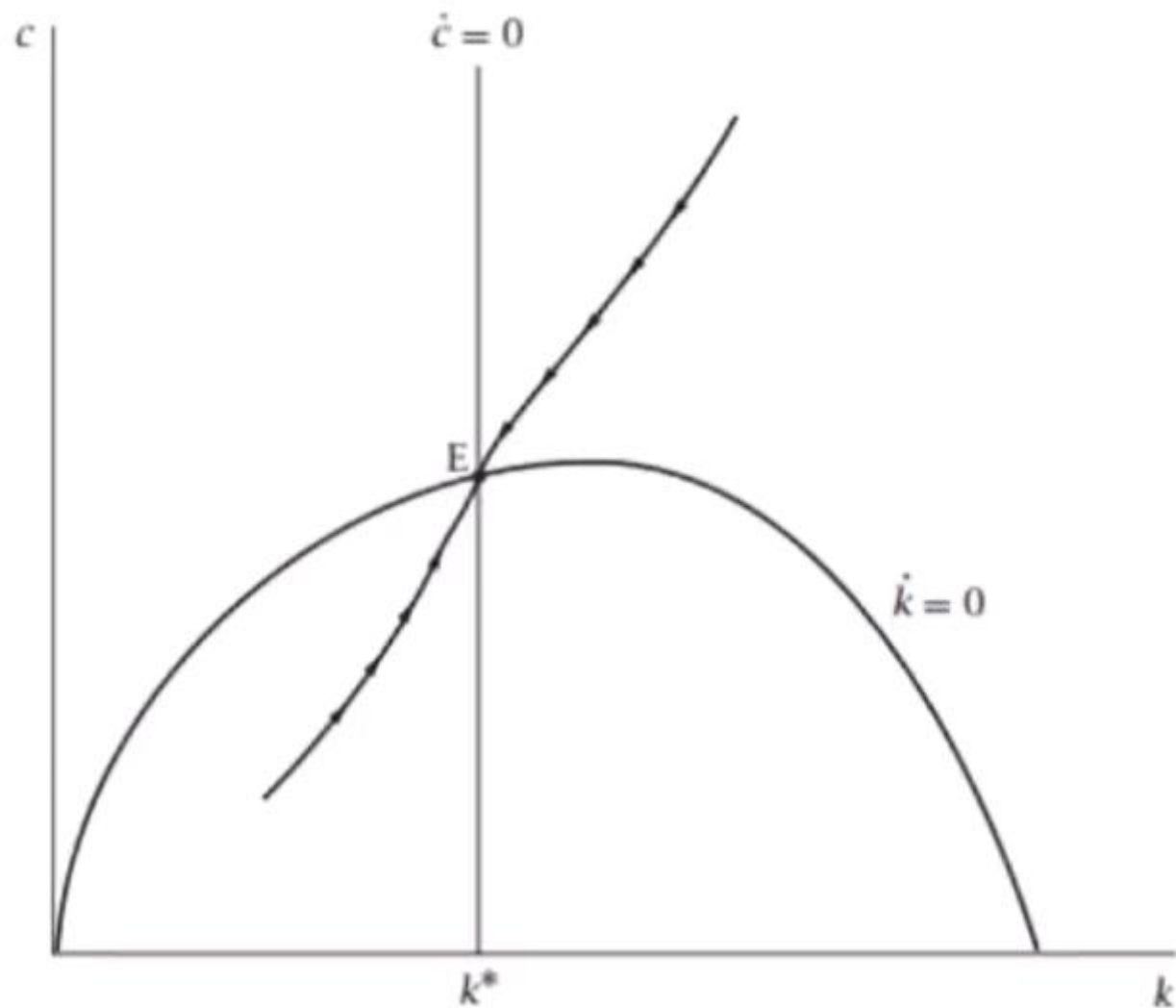
Exemplo

- Diferentes níveis de $c(0)$ e $k(0)$ podem levar, ou não, ao equilíbrio.
- Suponha $k(0)$ fixo, e veja para quais níveis de $c(0)$ há convergência ao equilíbrio.
- Para todo $k(0)$, existirá um único $c(0)$ consistente com o comportamento convergente.
- **Caminho de Sela:** combinações $[k(0), c(0)]$ que levam à convergência.

Trajetórias Divergentes



Resumo



Estáticas Comparativas

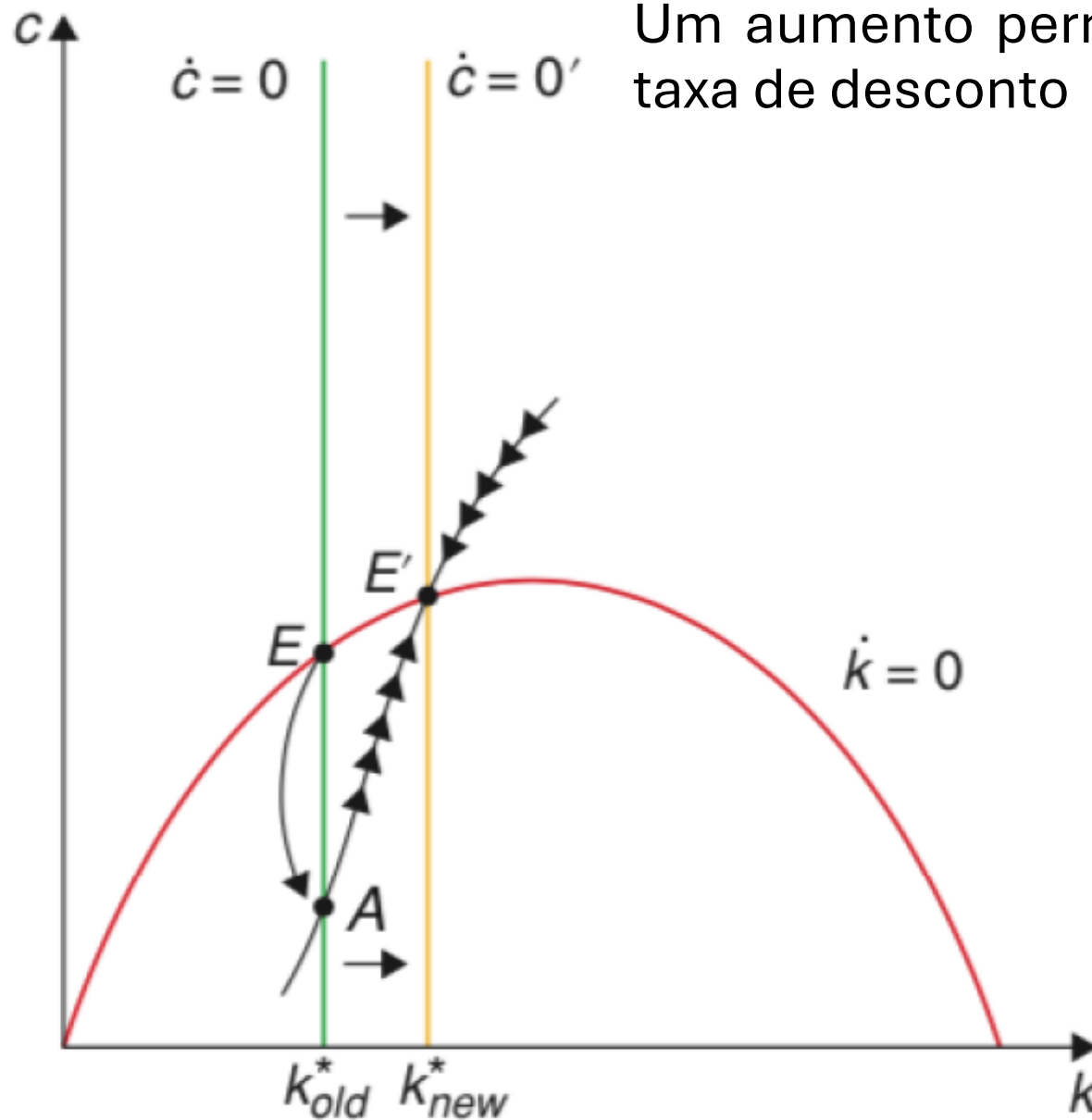
- Estáticas comparativas no modelo Ramsey-Cass-Koopmans. Deve-se observar qual é a função do sistema que está sendo afetada: equações (E.16) e (E.17).
- Choques em n e α (no caso de uma função de produção Cobb-Douglas) afetam $\dot{k}$.
- Choques em θ e ρ afetam $\dot{c}$.

1º Experimento: redução de ρ

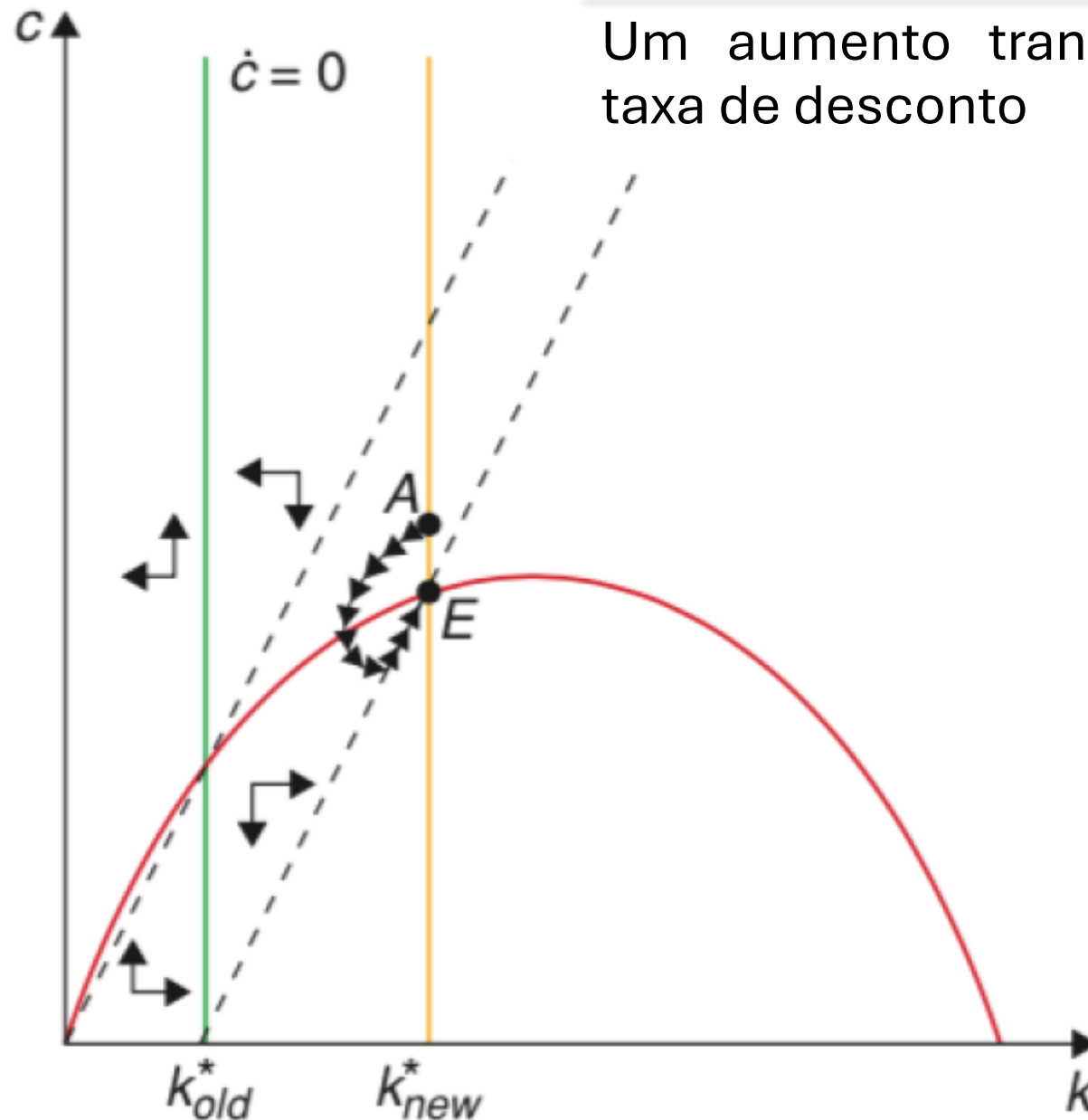
- Família prioriza menos o consumo presente.
- Consumo presente diminui: consumo futuro e investimento aumentam.
- Novo estado estacionário possui maior consumo e capital.

1º Experimento: redução de ρ

Um aumento permanente na taxa de desconto



1º Experimento: redução de ρ



Um aumento transitório na taxa de desconto

2º Experimento: aumento de g

- Impacto em $\dot{c}$ e $\dot{k}$.
- Efeitos diferem para o trabalhador e o trabalhador efetivo.
- Capital e consumo caem para o trabalhador efetivo.
- Capital e consumo aumentam para o trabalhador.

Velocidade de convergência

- A velocidade de convergência pode ser vista através de aproximações de Taylor de primeira ordem em torno de c^* e k^* :

$$\dot{c} \approx \frac{\partial \dot{c}}{\partial k} [k - k^*] + \frac{\partial \dot{c}}{\partial c} [c - c^*] \quad (E.20)$$

$$\dot{k} \approx \frac{\partial \dot{k}}{\partial k} [k - k^*] + \frac{\partial \dot{k}}{\partial c} [c - c^*] \quad (E.20)$$

- Suponha que as igualdades são válidas.

Velocidade de convergência

- Uma vez que c^* é constante, então $\dot{c} = [c - c^*]$

- O mesmo valerá para k^* :

$$c - c^* = \frac{f''(k^*)c^*}{\theta} [k - k^*] \quad (E.21)$$

$$k - k^* = \underbrace{[(\rho + \theta g) - (n + g)]}_{\beta} [k - k^*] - [c - c^*] \quad (E.22)$$

- Defina $\beta = [(\rho + \theta g) - (n + g)]$

Velocidade de convergência

$$\frac{c - c^*}{c - c^*} = \frac{f''(k^*)c^*}{\theta} \frac{[k - k^*]}{c - c^*} \quad (E.23)$$

$$\frac{k - k^*}{k - k^*} = \beta - \frac{[c - c^*]}{k - k^*} \quad (E.24)$$

- A velocidade de convergência depende da razão entre $k - k^*$ e $c - c^*$.