

Fundamentos matemáticos



Nesta seção, apresentamos uma breve panorâmica da otimização. O objetivo é interpretar intuitivamente as condições de primeira ordem de um problema de otimização

- Quando falamos de otimização, referimo-nos a encontrar o máximo ou o mínimo de uma função, sujeita a um conjunto de restrições. Ou seja, vamos analisar problemas do tipo:

$$\begin{aligned} \max_x f(x) \\ \text{s. a. } g(x) = 0 \end{aligned}$$

- Para resolver este problema, é necessário construir uma função auxiliar que permita resumir todo o problema numa única função. Esta função é designada por o **Lagrangiano** e é definida por :

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$$

- O termo λ que multiplica a equação que determina a restrição é conhecido **como multiplicador de Lagrange**.
- Intuitivamente, este termo determina a **importância da restrição**. Por exemplo, se $\lambda=0$, o Lagrangiano seria igual à função objetivo. Ou seja, a restrição não estaria a afetar a solução do problema.

Vamos agora concentrar-nos nas condições necessárias para resolver o problema colocado

- As condições necessárias para resolver o problema envolvem encontrar os pontos críticos.
- Diz-se que x^* é um ponto crítico de $f(x)$ se a derivada da função $f()$ avaliada em x^* for zero:

$$f'(x^*) = 0$$

- É Bom notar que o facto de x ser um ponto crítico é uma condição necessária, ou condição de primeira ordem. Ou seja, ela é satisfeita no máximo, mas pode haver pontos para os quais a derivada de $f(.)$ é 0 que não são um máximo.
- Agora, para o problema que estamos a resolver, os pontos críticos encontram-se em $\mathcal{L}$, não em $f(.)$. Especificamente, se x^* é uma solução do problema, então existe um λ^* tal que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x^*, \lambda^*) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x^*, \lambda^*) = 0$$

- Note-se que, se $f(.)$ e g são funções de mais do que uma variável, então $\partial \mathcal{L} / \partial x$ denota a derivada em relação a cada uma das variáveis.

Vejamos um exemplo do que é conhecido em economia como o problema do consumidor

- A solução do problema de maximização tem também uma interpretação geométrica.
- Para ilustrar esta interpretação, consideremos o problema de um consumidor que considera útil consumir dois bens, x_1 e x_2 , cujos preços são p_1 e p_2 . Suponhamos também que o consumidor tem um rendimento m .
- O consumidor quer maximizar a sua utilidade, tendo em conta que gasta o seu rendimento nos dois bens. Ou seja, o consumidor resolve o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2) \\ \text{s. a. } p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \end{aligned}$$

- $u(x_1, x_2)$ é a função de utilidade do indivíduo. Assumimos que é uma função contínua, côncava e crescente em x_1 e x_2 .
- Colocando o Lagrangiano, temos que:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$$

O problema do consumidor

- Encontramos os pontos críticos através das condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - m = 0$$

- Utilizando o multiplicador para igualar as condições de primeira ordem em relação a x_1 e x_2 :

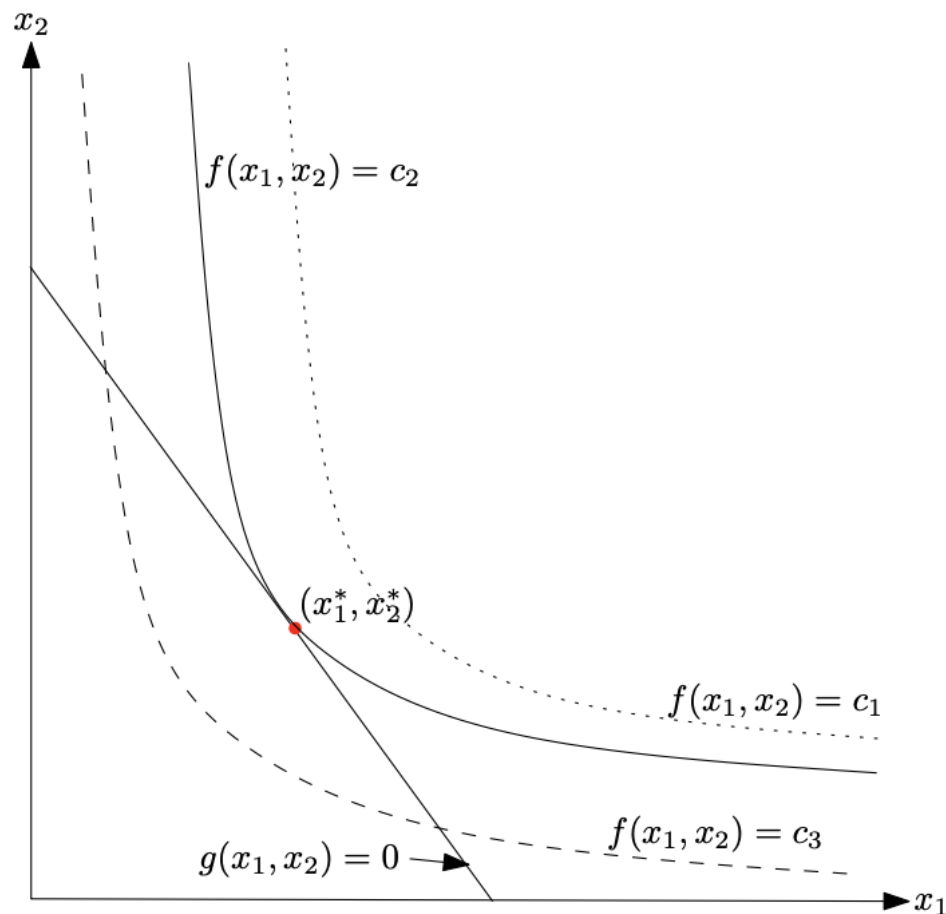
$$\frac{\partial u / x_1}{\partial u / x_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

- Isto diz-nos que, no ótimo, a taxa marginal de substituição deve ser igual à relação de preços dos bens de consumo.
- E a partir da CPO em relação ao multiplicador, temos que, no ótimo, a restrição deve ser estritamente satisfeita:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

O problema do consumidor: Intuição geométrica

Problema do consumidor



- Esta figura mostra três curvas de nível $f(\cdot)$ (curvas de indiferença de u), em que $c_1 > c_2 > c_3$. Ou seja, obtém-se uma utilidade mais elevada na curva de nível correspondente a c_1 do que nas outras duas.
- O consumidor escolherá um cabaz de consumo numa curva de nível tão elevada quanto possível. No entanto, não poderá escolher um cabaz de consumo na curva de nível correspondente a c_3 porque nenhum cabaz nesta curva de nível satisfaz a restrição orçamental (a curva de nível não toca a curva $g(x_1, x_2) = 0$).

Referências

Banco Interamericano de Desenvolvimento – Treinamento FISLAC
Divisão de Gestão Fiscal
Novembro 2025

