

Macroeconomia Avançada

Aula 7(b): Introdução aos Modelos de Ciclos Reais de Negócios (Modelos RBC)

1ª Geração dos Modelos DSGE

Informativo

Essa nota de aula é um resumo dos principais tópicos constantes nas referências bibliográficas da disciplina Macroeconomia Avançada, lecionada no Programa de Doutorado e Mestrado em Economia do Instituto Brasileiro de Ensino, Desenvolvimento e Pesquisa (IDP).

Eu destaco que essa nota de aula não tem fins comerciais, servindo exclusivamente como material de apoio às aulas dessa disciplina.

Quaisquer erros e omissões são de minha inteira responsabilidade.

Contribuições e considerações podem ser enviadas para:

sergio.gadelha@idp.edu.br ou
professor.sergio.gadelha@gmail.com

1. Anatomia de Modelos de Ciclos Reais de Negócios (Ciclos Econômicos Reais ou *Real Business Cycles* - RBC)

2. Modelo RBC Básico



Anatomia de um Modelo DSGE

Ciclos Econômicos Reais (CER) em uma Economia Fechada

Uma abordagem de arquitetura de sistemas baseada em microfundamentos matemáticos.

A Filosofia DSGE: Macro a partir da Micro

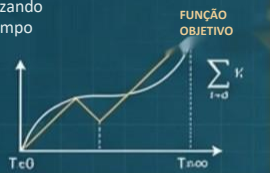
Agente Representativo

A economia se reduz à interação matemática entre um domicílio médio e uma empresa média.



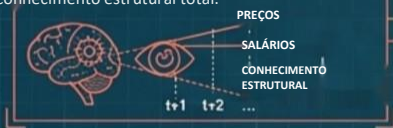
Otimização Dinâmica

Cada agente toma decisões maximizando uma função objetivo ao longo do tempo infinito.



Expectativas Racionais

Os agentes são forward-looking, prevendo preços e salários com conhecimento estrutural total.



Microeconomia



Microeconomia



Microeconomia



Microeconomia

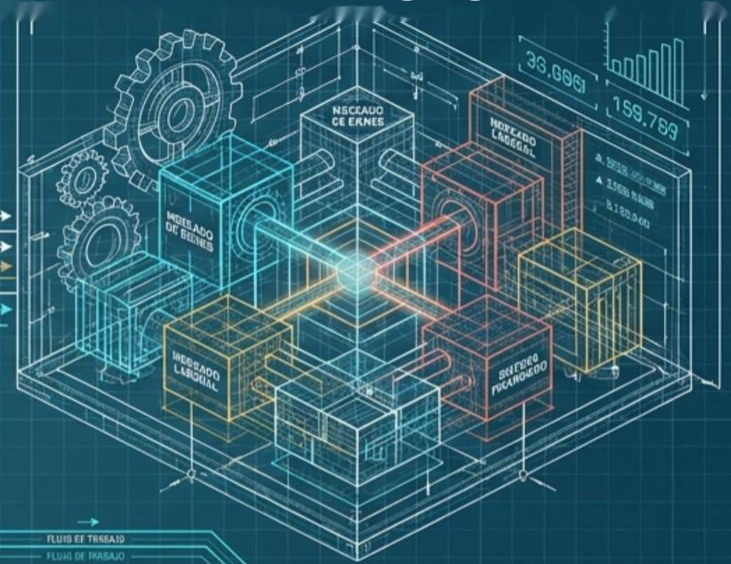


Microeconomia



Microeconomia

Macroeconomia Agregada



O Terreno de Jogo: Premissas da Economia

O que NÃO há (Exclusões)



Sem dinheiro nem
setor financeiro

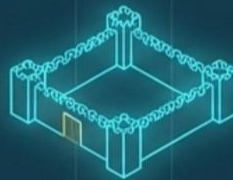


Sem setor público /
Governo



Sem fricções (Preços
e salários 100% flexíveis)

O que HÁ (Inclusões)



Economia Fechada



Concorrência Perfeita



**Horizonte Temporal
Infinito**

Os Motores do Modelo: Atores Principais

O Domicílio Representativo



Maximizar utilidade
intertemporal esperada (U)

Objetivo: Maximizar utilidade intertemporal esperada (U)

Restrição: Orçamento intertemporal

Posses (dotações): Donos absolutos de Capital (K) e Trabalho (L).

Decisão: Consumo, Investimento e Oferta de Trabalho

A Empresa Representativa



Maximizar lucros
atuais (π)

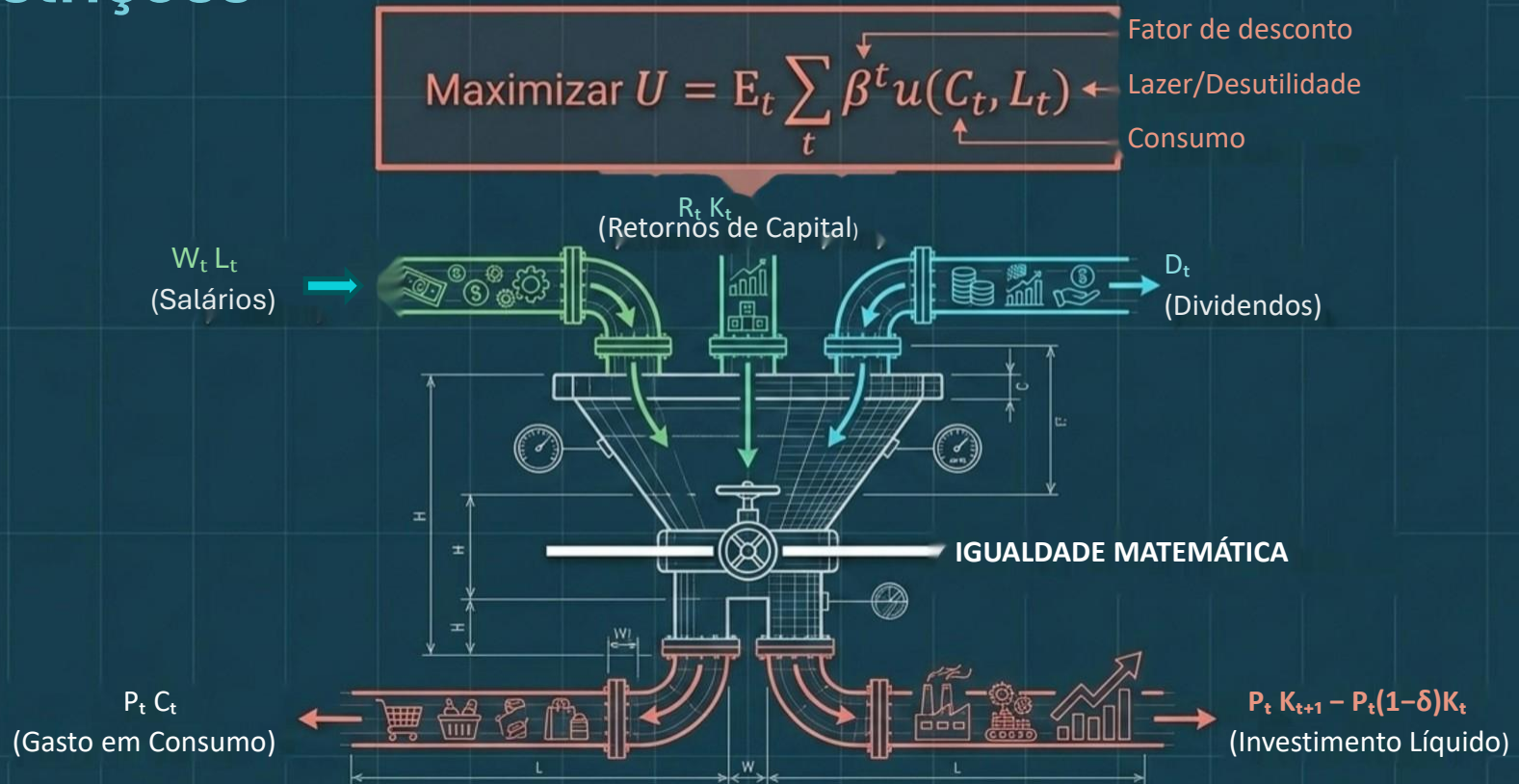
Objetivo: Maximizar lucros atuais (π)

Restrição: Tecnologia produtiva
(Função Cobb-Douglas)

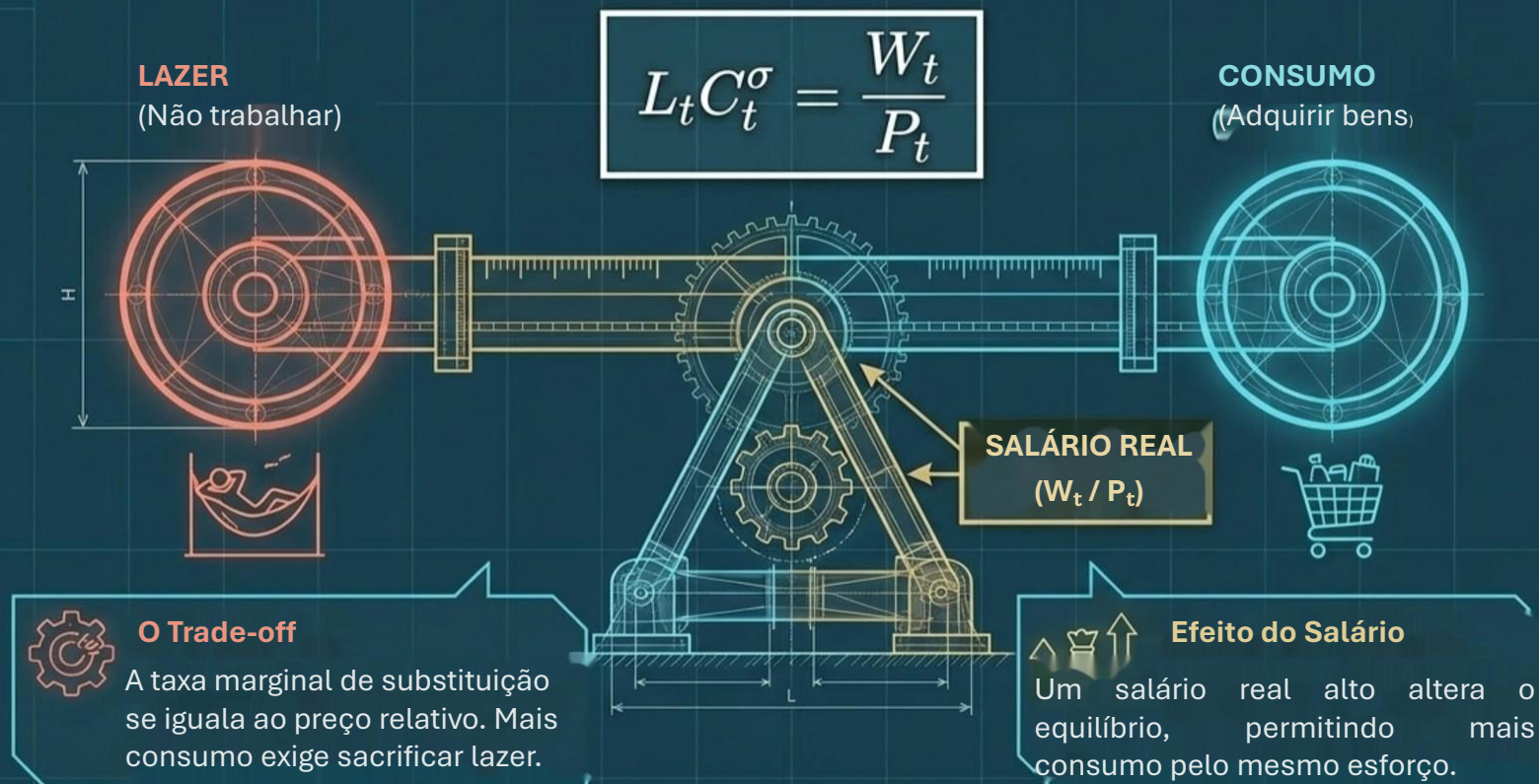
Posses (Dotações): Nenhuma (Alugam fatores período a período)

Decisão: Demanda de Capital e Trabalho.

O Problema do Domicílio: Maximização sob Restrições



A Escolha Intratemporal (Hoje): Lazer versus Consumo

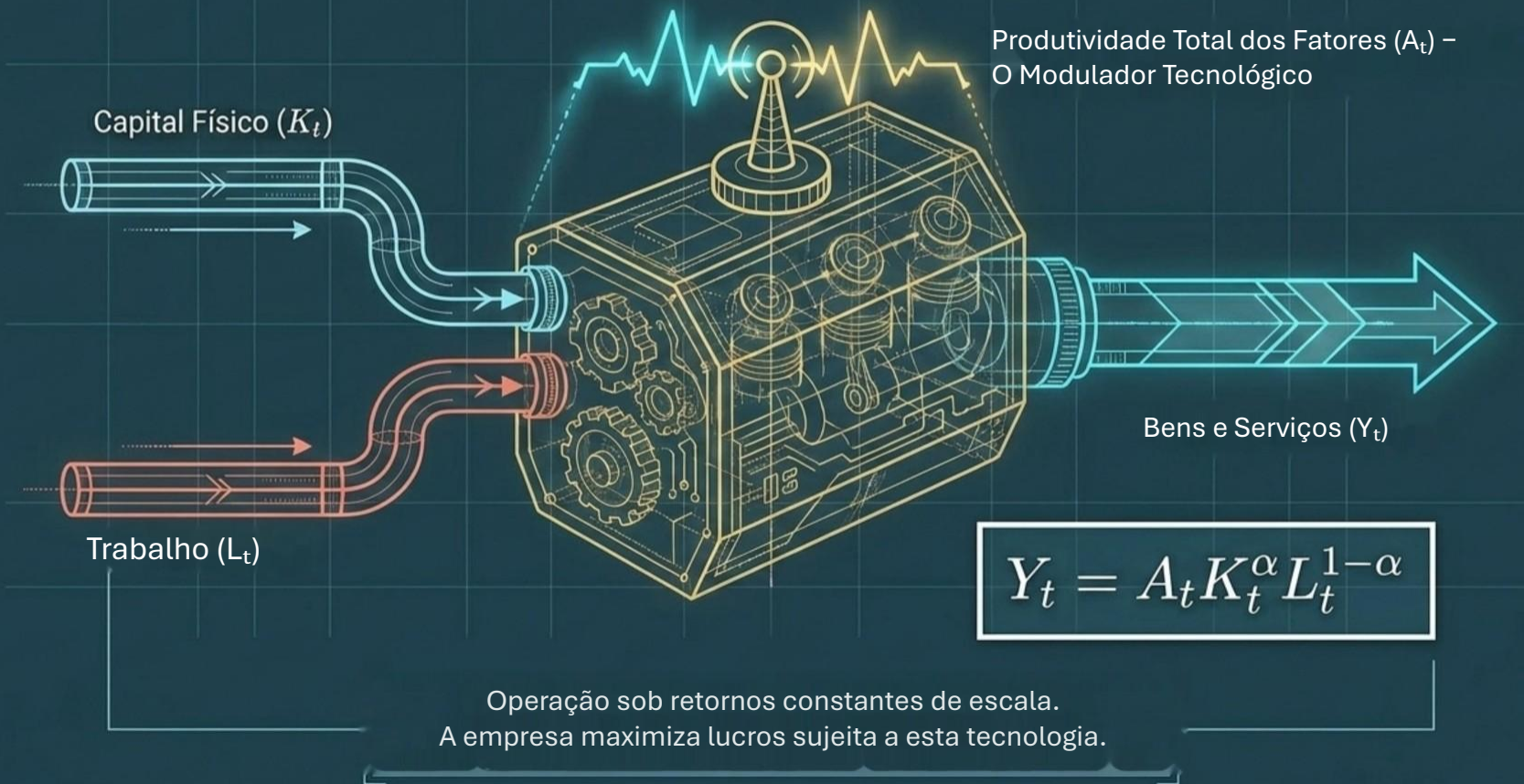


A Equação de Euler: A Viagem no Tempo do Valor

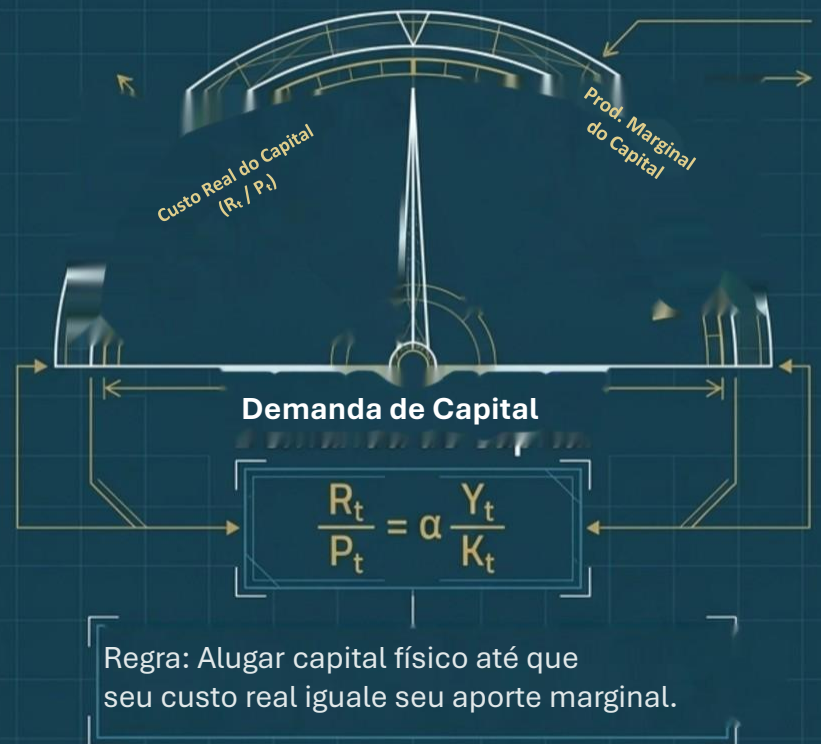
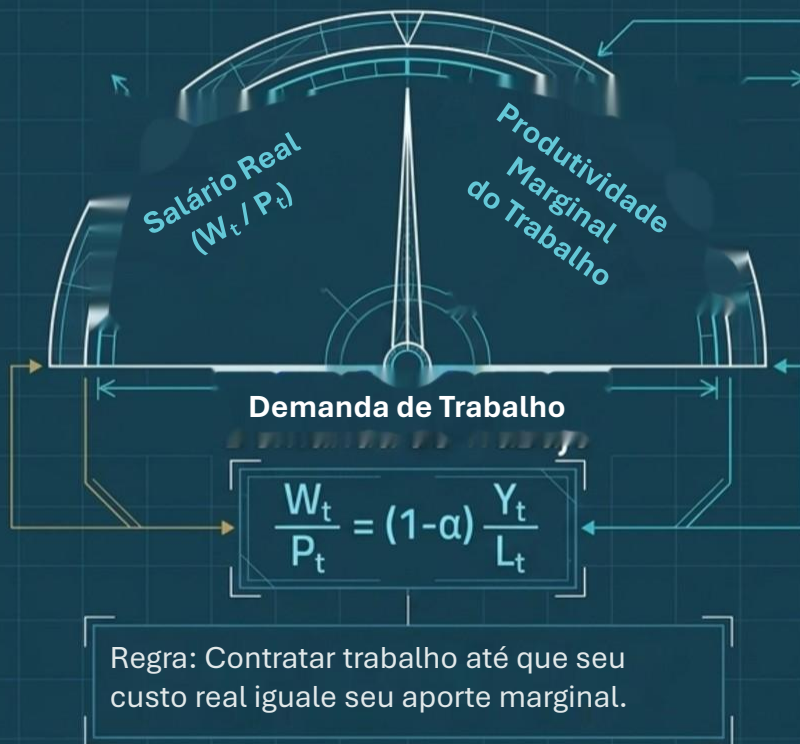
$$C_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[C_{t+1}^{-\sigma} \left((1 - \delta) + \frac{R_{t+1}}{P_{t+1}} \right) \right]$$



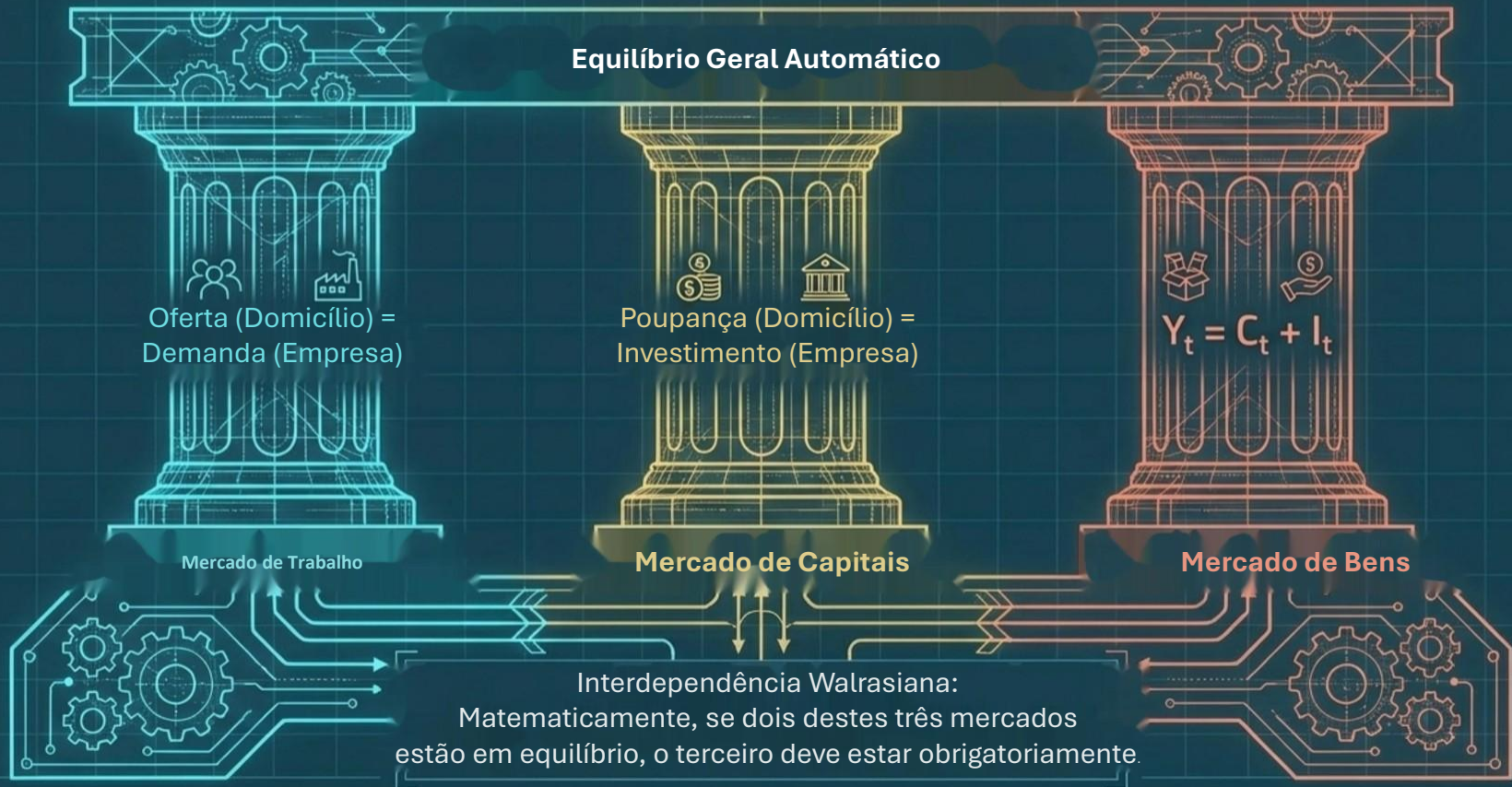
A Empresa Representativa: O Motor Produtivo



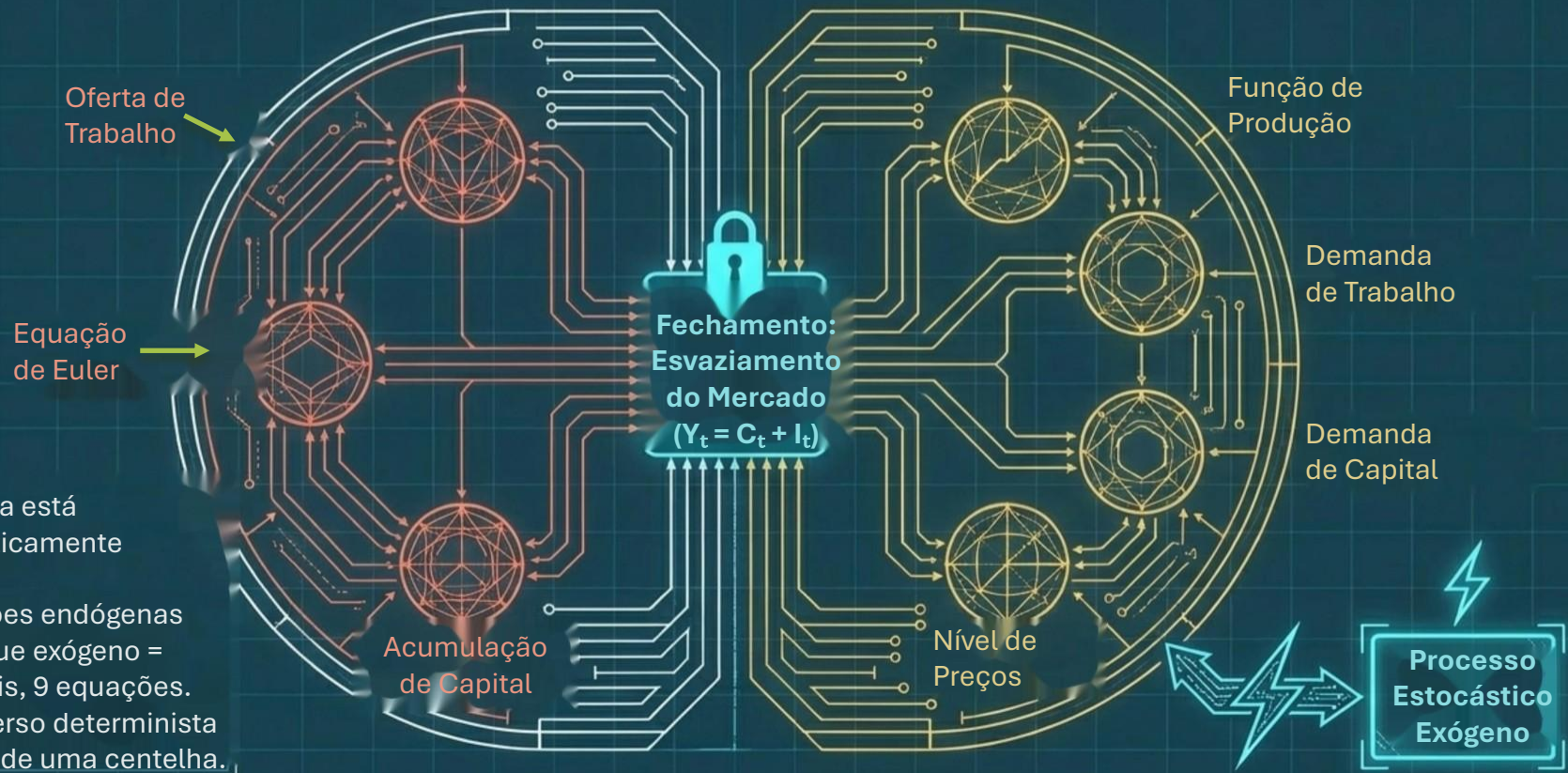
As Demandas Ótimas da Empresa



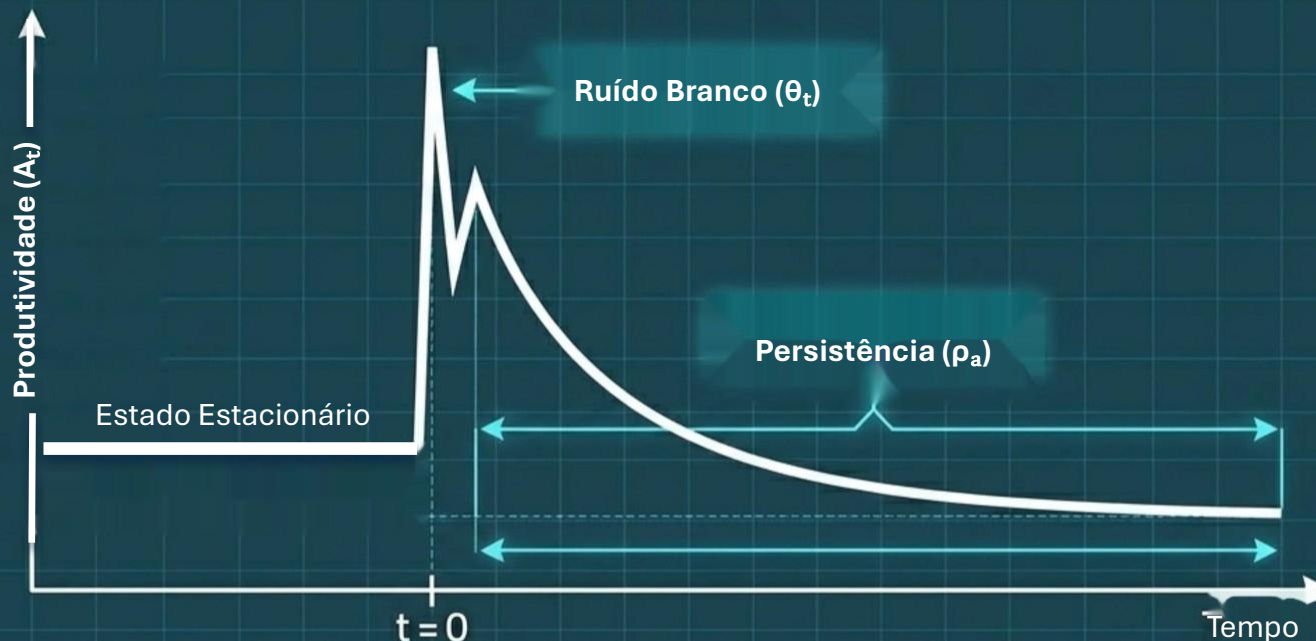
Lei de Walras: O Esvaziamento dos Mercados



O Blueprint Final: Arquitetura do Equilíbrio Geral



O Catalisador: Choque Estocástico de Produtividade



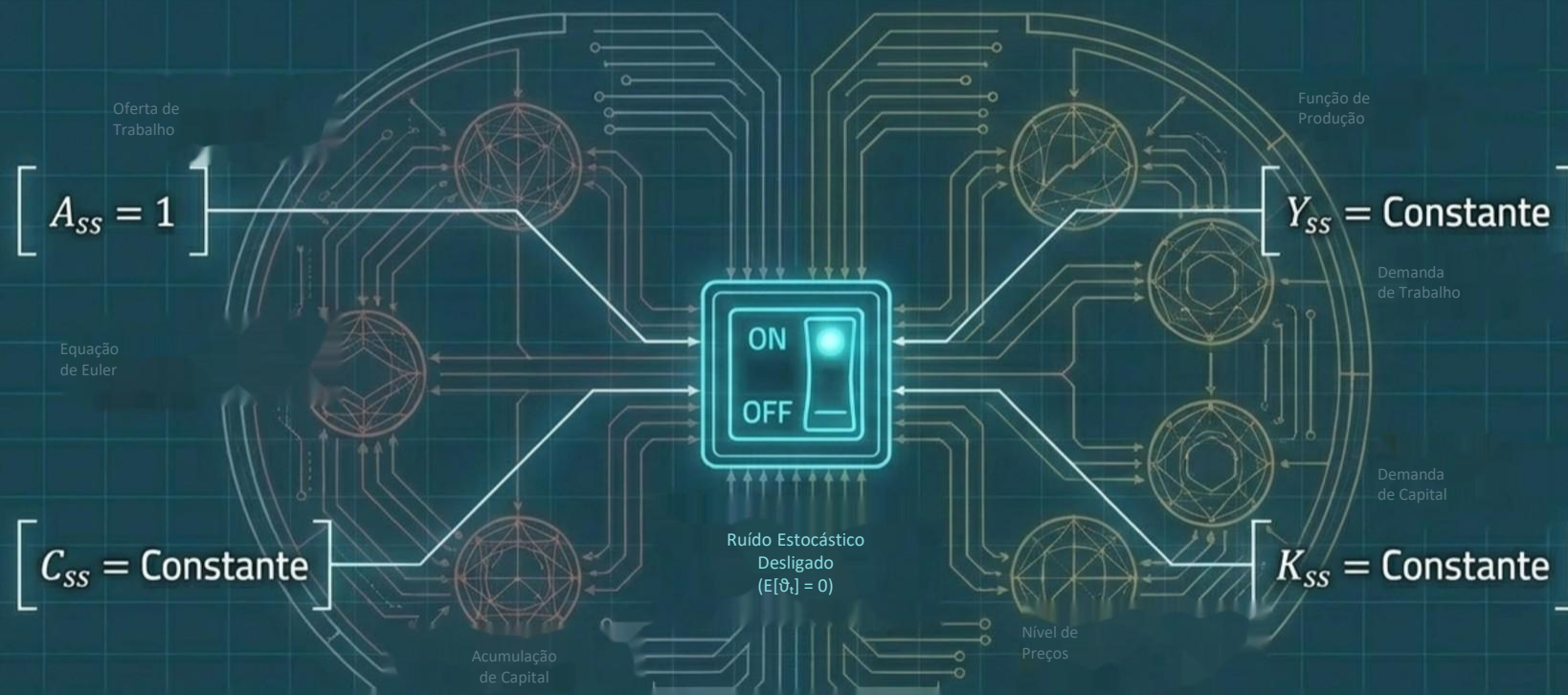
Ruído Branco: Impacto tecnológico repentino. Média zero.

AR(1):

$$\ln A_t = (1 - \rho_A) \ln A_{SS} + \rho_A \ln A_{t-1} + \vartheta_t$$

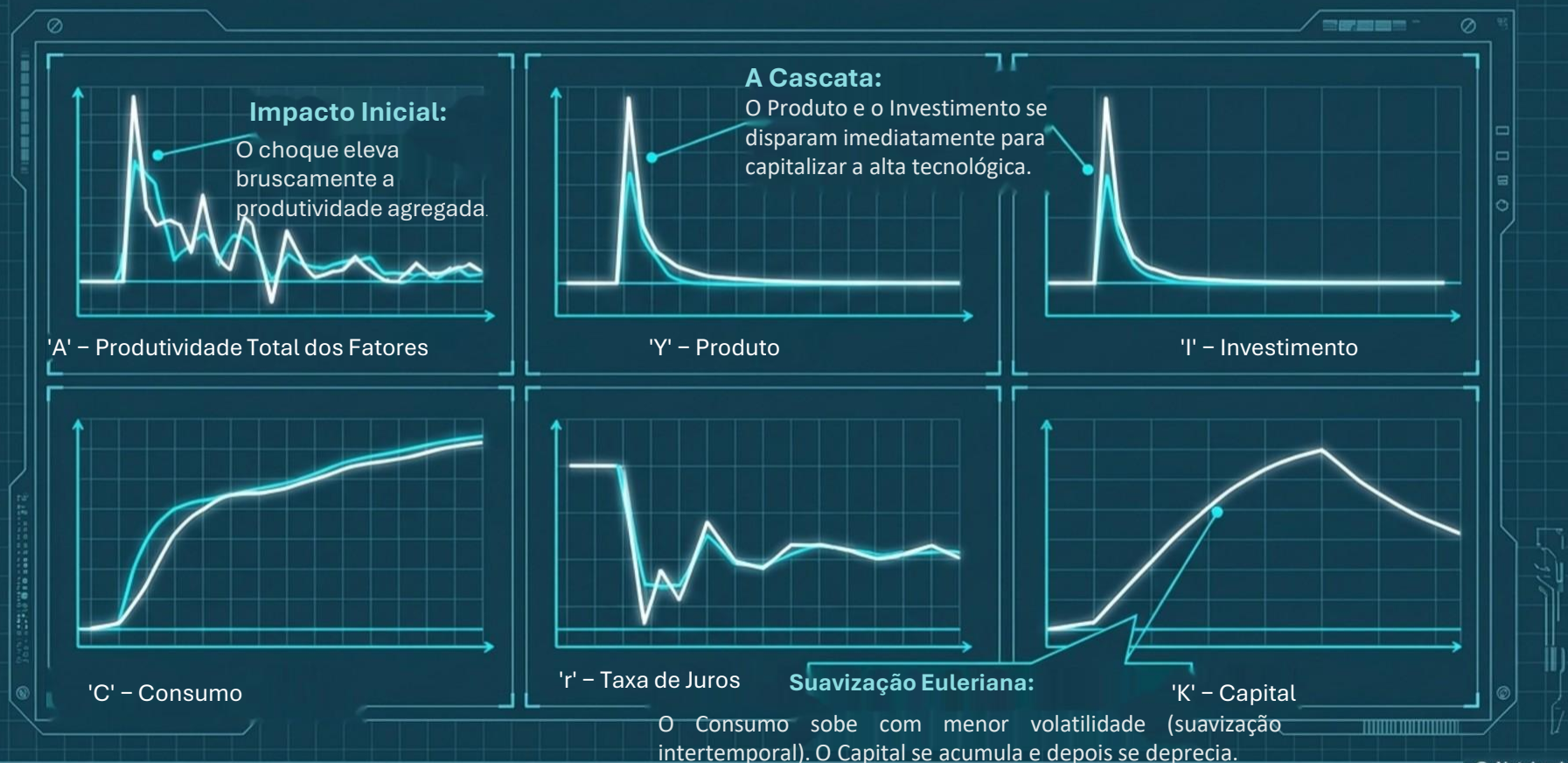
Persistência: Determina o tempo de absorção do choque na economia.

A Âncora do Sistema: O Estado Estacionário



Mecânica do Repouso: Quando o choque é desligado, a produtividade se estabiliza. O modelo entra em repouso absoluto, fornecendo o ponto de referência inercial a partir do qual os algoritmos numéricos log-linearizam as flutuações.

Funções Impulso-Resposta: A Máquina em Movimento



Conclusão: A Elegância dos Ciclos Econômicos Reais

1. Fundamentos Microeconômicos

Agentes racionais otimizando continuamente sob restrições estritas de orçamento e tecnologia.



3. Dinâmica Estocástica

Arquitetura determinista que ganha vida, gerando ciclos econômicos impulsionados puramente por flutuações tecnológicas.

2. Concorrência Perfeita

Preços flexíveis e mercados que se esvaziam instantaneamente através de interações walrasianas.

1. Anatomia de Modelos de Ciclos Reais de Negócios (Ciclos Econômicos Reais ou *Real Business Cycles* - RBC)

2. Modelo RBC Básico

Modelos RBC

- Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans com choques de produtividade reproduzem co-movimentos do Produto, Consumo e Investimento. Os Modelos RBC desempenham bem os co-movimentos nessas variáveis mencionadas anteriormente e o nível de emprego.
- Kydland e Prescott (1982) usaram um modelo de equilíbrio geral microfundamentado para reproduzir algumas características dos ciclos econômicos observados na economia dos Estados Unidos da América (EUA).
- ▶ Esse estudo vai de encontro com a teoria keynesiana, a qual previa que ciclos econômicos eram resultados de falhas de mercado.
- ▶ O modelo básico contém um consumidor representativo que maximiza a utilidade sujeito a sua restrição orçamentária.
- ▶ A utilidade depende positivamente do consumo e negativamente das horas trabalhadas.

Modelos RBC Plenos

- ▶ Existe uma firma representativa que combina capital e horas de trabalho do consumidor para produzir um produto homogêneo, dado o nível de tecnologia existente.
- ▶ O log do nível de tecnologia evolui de acordo com um modelo autorregressivo de primeira ordem: $AR(1)$.
- ▶ O capital deprecia ao longo do tempo e investimentos também afetam o estoque de capital.

Problema do Planejador Central

$$\max E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i U(C_{t+i}, L_{t+i}) \quad (1)$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\left. \begin{aligned} N_{t+i} + L_{t+i} &= 1 \\ C_{t+i} + I_{t+i} &= Z_{t+i} F(K_{t+i}, N_{t+i}) \\ K_{t+i+1} &= (1 - \delta) K_{t+i} + S_{t+i} \\ \log(Z_{t+i}) &= (1 - \rho) \log(\bar{Z}) + \rho \log(Z_{t+i-1}) + \varepsilon_t \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Problema do Planejador Central

Onde N representa as horas de trabalho e L representa as horas de lazer.

- ▶ A dotação de tempo é normalizada em 1.
- ▶ Seria possível modelar crescimento econômico através de progresso tecnológico neutro de Harrod em N_t .

Como no Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans Estocástico, deve-se usar programação dinâmica para resolver este problema.

Função Lagrangeana

Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = E \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i [U(C_{t+i}, L_{t+i}) - \lambda_t (C_{t+i} + K_{t+i+1} - (1 - \delta)K_{t+i} - Z_{t+i}F(K_{t+i}, N_{t+i}))] \right\}$$

Condições de Primeira Ordem (CPO) para o período t :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = U_C(C_t, L_t) - \lambda_t = 0 \Rightarrow U_C(C_t, L_t) = \lambda_t$$

Condições de Primeira Ordem (CPO)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t} = U_L(C_t, L_t) - \lambda_t Z_t F_N(K_t, 1 - L_t) = 0$$

$$\Rightarrow U_L(C_t, L_t) = \lambda_t Z_t F_N(K_t, 1 - L_t)$$

Note que a relação $N = 1 - L$ é explorada.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} = -\lambda_t + \beta E\{\lambda_{t+1}[Z_{t+1}F_K(K_{t+1}, N_{t+1}) + 1 - \delta]\} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_t = \beta E\{\lambda_{t+1}[Z_{t+1}F_K(K_{t+1}, N_{t+1}) + 1 - \delta]\}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = C_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t - Z_t F(K_t, N_t) = 0$$

Condições de Primeira Ordem (CPO)

Define-se:

$$R_{t+1} \equiv 1 - \delta + Z_{t+1}F_K(K_{t+1}, 1 - L_t)$$

$$W_t \equiv Z_t F_N(K_{t+1}, 1 - L_t)$$

Condições de Primeira Ordem (CPO)

Definindo o retorno do capital como $R_t = 1 - \delta + Z_{t+1}F_K(K_t, N_t)$ e o salário real como $W_t = Z_t F_N(K_t, N_t)$, pode-se reescrever as condições de primeira ordem no seguinte conjunto de equações:

$$U_C(C_t, L_t) = \lambda_t$$

$$U_L(C_t, L_t) = \lambda_t W_t \Rightarrow \lambda_t = \frac{U_L(C_t, L_t)}{W_t}$$

$$\lambda_t = \beta E[\lambda_{t+1} R_{t+1}]$$

Interpretação: consumidores na economia descentralizada otimizando, tomando salário e taxas de juros como dados.

Interpretações

Combinando as duas primeiras CPO, obtém-se a **condição intratemporal**:

$$U_C(C_t, L_t) = \frac{U_L(C_t, L_t)}{W_t} \Rightarrow U_L(C_t, L_t) = W_t U_C(C_t, L_t) \quad (3)$$

Interpretação: aumenta-se uma unidade de trabalho e reduz o lazer na mesma magnitude. Reduz a utilidade de $U_L(C_t, L_t)$ por conta da redução de uma unidade de lazer. A unidade de trabalho adicional gera W_t unidades adicionais do bem de consumo aumentando a utilidade de $W_t U_C(C_t, L_t)$. O ganho e a perda são iguais.

Note que $U_C(\cdot)$ é a utilidade marginal da renda, logo (3) informa que a utilidade marginal do lazer será igual a utilidade marginal da renda vezes o salário.

Interpretações

Condição intertemporal de Keynes-Ramsey:

$$U_C(C_t, L_t) = \beta E[\lambda_{t+1} R_{t+1}] \quad (4a)$$

$$U_C(C_t, L_t) = E[\beta R_{t+1} U_C(C_{t+1}, L_{t+1})] \quad (4b)$$

Como (4) não se alterou, o efeito sobre as decisões de consumo e poupança não se alteram.

Interpretação: reduz uma quantidade de consumo hoje e perde $U_C(C_t, L_t)$, poupa, e recebe R_{t+1} em unidades de consumo amanhã, aumentando a utilidade esperada em: $E[\beta R_{t+1} U_C(C_{t+1}, L_{t+1})]$.

Interpretações

No contexto de modelos macroeconômicos de equilíbrio geral dinâmico, a especificação:

$$U(C, L) = \log C + v(L)$$

possui propriedades muito importantes para a análise das decisões de consumo e oferta de trabalho.

Interpretações

1. Separabilidade aditiva entre consumo e lazer

A função utilidade é composta por dois termos independentes:

$$U(C, L) = \log C + v(L)$$

Isso implica que:

$$U_C = \frac{\partial U}{\partial C} = \frac{1}{C}$$

e

$$U_L = \frac{\partial U}{\partial L} = v'(L)$$

Como

$$\frac{\partial^2 U}{\partial C \partial L} = 0$$

não existe interação direta entre consumo e lazer na utilidade.

Interpretações

Interpretação econômica. O consumo não altera a utilidade marginal do lazer:

$$\frac{\partial U_L}{\partial C} = 0$$

Da mesma forma, o lazer não altera a utilidade marginal do consumo:

$$\frac{\partial U_C}{\partial L} = 0$$

Em termos intuitivos:

Um indivíduo mais rico (com maior consumo) valoriza uma hora adicional de lazer da mesma forma que um indivíduo mais pobre.

Uma pessoa com mais lazer disponível atribui o mesmo valor marginal a uma unidade adicional de consumo.

Interpretações

2. Condição intratemporal

Suponha que o indivíduo possua uma restrição de tempo:

$$N_t + L_t = 1$$

onde:

N_t = horas trabalhadas;

L_t = lazer.

O salário real é W_t .

A condição de primeira ordem para a escolha ótima entre trabalho e lazer é

$$v'(L_t) = \frac{W_t}{C_t}$$

ou, equivalentemente,

$$v'(L_t) = W_t U_C(C_t)$$

Interpretações

Interpretação econômica

O lado esquerdo:

$$v'(L_t)$$

é o benefício marginal de uma hora adicional de lazer.

O lado direito:

$$\frac{W_t}{C_t}$$

é o custo de oportunidade do lazer.

Por quê?

Uma hora adicional de lazer implica trabalhar uma hora a menos.

Isso reduz a renda em W_t .

Interpretações

Como a utilidade marginal do consumo é $1/C_t$, a perda de utilidade associada a essa redução de renda é

$$W_t \times \frac{1}{C_t}$$

Logo, no ótimo:

benefício marginal do lazer = custo marginal do lazer.

Efeito de aumento do salário

Se C_t permanecer constante, um aumento de W_t eleva

$$\frac{W_t}{C_t}$$

Para restaurar a igualdade, é necessário reduzir L_t (quando $v'' < 0$), aumentando as horas trabalhadas. Assim, salários mais altos tendem a incentivar a oferta de trabalho.

Interpretações

3. Condição intertemporal (Equação de Euler)

A condição apresentada é:

$$E_t \left[\beta R_{t+1} \frac{C_t}{C_{t+1}} \right] = 1$$

Ela decorre da condição geral:

$$U_C(C_t) = \beta E_t[R_{t+1} U_C(C_{t+1})]$$

Interpretações

Substituindo:

$$U_C(C) = \frac{1}{C}$$

Obtemos:

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \left[R_{t+1} \frac{1}{C_{t+1}} \right]$$

Multiplicando por C_t :

$$1 = \beta E_t \left[R_{t+1} \frac{C_t}{C_{t+1}} \right]$$

que é exatamente a expressão fornecida.

Interpretações

4. Significado econômico da Equação de Euler

A equação descreve a escolha ótima entre:

- (i) consumir uma unidade hoje;
- (ii) poupar essa unidade para consumir amanhã.

No ótimo, o agente é indiferente entre essas alternativas.

Se

$$\beta R_{t+1} \frac{C_t}{C_{t+1}} > 1$$

então o retorno de transferir consumo para o futuro é muito alto.

O indivíduo aumenta a poupança e reduz o consumo corrente.

Interpretações

Se:

$$\beta R_{t+1} \frac{C_t}{C_{t+1}} < 1$$

então o consumo presente é relativamente mais atraente.

O agente reduz a poupança e aumenta o consumo atual.

Interpretações

5. Caso sem incerteza

Sem choques estocásticos, a esperança desaparece:

$$\beta R_{t+1} \frac{C_t}{C_{t+1}} = 1$$

Logo:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta R_{t+1}$$

Essa é a taxa ótima de crescimento do consumo.

Interpretações

Casos relevantes

$$\text{Se } \beta R_{t+1} > 1 \Rightarrow C_{t+1} > C_t$$

O consumo cresce ao longo do tempo.

$$\text{Se } \beta R_{t+1} < 1 \Rightarrow C_{t+1} < C_t$$

O consumo decresce ao longo do tempo.

$$\text{Se } \beta R_{t+1} = 1 \Rightarrow C_{t+1} = C_t$$

O consumo permanece constante, caracterizando um caminho de suavização perfeita do consumo.

Interpretações

6. Relação com a Elasticidade de Substituição Intertemporal (EIS)

Para a utilidade CRRA geral:

$$U(C) = \frac{C^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}$$

a elasticidade de substituição intertemporal é:

$$EIS = \frac{1}{\sigma}$$

A utilidade logarítmica é o caso particular:

$$\sigma = 1$$

Portanto,

$$EIS = 1$$

Interpretações

Interpretação

Uma variação de 1% na taxa de retorno intertemporal gera aproximadamente uma variação de 1% na razão entre consumo futuro e consumo presente.

Ou seja, o consumidor possui capacidade intermediária para substituir consumo entre períodos.

Resumo

Resumo

Com

$$U(C, L) = \log C + v(L)$$

obtém-se:

$$U_C = \frac{1}{C}, U_L = v'(L)$$

Condição intratemporal:

$$v'(L_t) = \frac{W_t}{C_t}$$

Benefício marginal do lazer = custo de oportunidade em termos de consumo.

Resumo

Condição intertemporal (Euler):

$$E_t \left[\beta R_{t+1} \frac{C_t}{C_{t+1}} \right] = 1$$

Benefício de consumir hoje = benefício esperado de poupar e consumir amanhã.

Elasticidade de substituição intertemporal: $EIS = 1$.

A utilidade logarítmica gera uma regra particularmente simples para o crescimento ótimo do consumo e é uma das especificações mais utilizadas em modelos RBC, DSGE e economia quantitativa.

Resumo

Efeitos de um choque de tecnologia favorável

Aumenta W e R , corrente e prospectivo:

(i) Consumo. Dois efeitos envolvidos na condição intertemporal:

smoothing, que tende a aumentar o consumo e *tilting*, que tende a diminuir. Liquidamente é plausível que o consumo aumente.

(ii) Lazer/trabalho. Dois efeitos envolvidos na condição intratemporal:

efeito substituição: maior W faz as pessoas trabalharem mais duro;

efeito renda: maior consumo faz com que as pessoas se sintam mais ricas, reduzindo a utilidade marginal do consumo (da riqueza), então eles querem também ter mais lazer.

Resumo

Lazer/trabalho

efeito líquido depende da força dos dois efeitos. A força do efeito substituição depende da elasticidade da oferta de trabalho e a força do efeito renda de quão persistente é o choque de produtividade.

- (i) quanto mais transitório for o choque, menor o aumento no consumo e mais forte o efeito substituição;
- (ii) se o choque é permanente o efeito riqueza é mais forte. Consumo pode aumentar mais do que W (mas menos que $ZF(K, N)$) e o emprego pode decrescer.

Condição Intertemporal para Lazer

Outra forma de abordar os efeitos de emprego: **Condição Intertemporal para Lazer**

Por conveniência, suponha que $v(L) = \phi \log L$. Logo, $v'(L) = \phi/L$. Substituindo na condição intertemporal, obtemos:

$$\phi C_t = W_t L_t$$

Substituindo a expressão do consumo dada por esta equação na condição intertemporal para obter:

$$E_t \left[\beta \left(R_{t+1} \frac{W_t}{W_{t+1}} \right) \frac{L_t}{L_{t+1}} \right] = 1$$

Condição Intertemporal para Lazer

O que é relevante para a decisão entre ter lazer hoje ou no futuro é a taxa de retorno descontada do aumento do salário real, que é o custo do lazer.

Ou seja, se $R_{t+1}(W_t/W_{t+1})$ aumenta, isto significa que o retorno de uma hora a menos de lazer aumenta mais do que o custo do lazer. Isto leva a um decréscimo de (L_t/L_{t+1}) , o que significa no aumento do lazer amanhã em relação ao lazer hoje.

Choques

Choque transitório de produtividade, de tal forma que W_t aumenta, mas W_{t+1} não muda muito (R aumenta também) leva um declínio acentuado de (L_t/L_{t+1}) e a um aumento forte no emprego.

Choque permanente de produtividade: então (W_t/W_{t+1}) é, a grosso modo, constante. Se há algum aumento no emprego induzido pelo aumento de R , este aumento é bem menor.

Caso Especial

Esse exemplo é um caso clássico do modelo RBC com preferências logarítmicas e depreciação integral do capital ($\delta = 1$), escolhido justamente porque admite uma **solução analítica fechada**. O principal resultado é que o emprego não responde aos choques tecnológicos, o que revela uma limitação importante do modelo.

1. Estrutura do problema

A utilidade do agente é $U(C_t, L_t) = \log C_t + \phi \log L_t$, com $L_t = 1 - N_t$.

A tecnologia é Cobb-Douglas: $Y_t = Z_t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha}$.

Como há depreciação plena, $\delta = 1$, a lei de movimento do capital torna-se $K_{t+1} = Y_t - C_t$, ou $K_{t+1} = Z_t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha} - C_t$.

Caso Especial

O problema do planejador

A economia resolve

$$\max_{\{C_t, N_t, K_{t+1}\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\log C_t + \phi \log(1 - N_t)]$$

sujeito a

$$K_{t+1} = Z_t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha} - C_t$$

Como a depreciação é plena ($\delta = 1$), todo o capital do período t desaparece ao final do período.

Definamos

$$Y_t = Z_t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha}$$

Assim,

$$K_{t+1} = Y_t - C_t$$

Caso Especial

2. Equação de Bellman

O problema dinâmico pode ser escrito como:

$$V(K_t, Z_t) = \max_{C_t, N_t} \{ \log C_t + \phi \log(1 - N_t) + \beta E_t[V(K_{t+1}, Z_{t+1})] \}$$

sujeito a:

$$K_{t+1} = Z_t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha} - C_t$$

Caso Especial

3. Solução para o consumo

A condição de Euler é:

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t[V_K(K_{t+1}, Z_{t+1})]$$

Pela condição de envelope,

$$V_K(K_t, Z_t) = \beta E_t[V_K(K_{t+1}, Z_{t+1})\alpha Z_t K_t^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha}]$$

Usando a condição de primeira ordem do consumo:

$$\boxed{\frac{1}{C_t} = \beta E_t \left[\frac{1}{C_{t+1}} \alpha Z_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} \right]}$$

que é a equação de Euler.

Caso Especial

Conjectura para a função consumo

Como a tecnologia é Cobb-Douglas e a utilidade é logarítmica, conjecturamos que o agente consome uma fração constante do produto:

$$C_t = \lambda Y_t$$

Logo,

$$K_{t+1} = (1 - \lambda)Y_t$$

Vamos encontrar λ .

Caso Especial

Determinação de λ

Como

$$K_{t+1} = (1 - \lambda)Y_t$$

temos

$$Y_t = \frac{K_{t+1}}{1 - \lambda}$$

Substituindo na Euler e explorando a homogeneidade da Cobb-Douglas, obtém-se a condição de consistência:

$$\boxed{\lambda = 1 - \alpha\beta}$$

Caso Especial

Utilizando a condição de envelope e explorando a homogeneidade da função Cobb-Douglas, obtém-se a política ótima:

$$\boxed{C_t = (1 - \alpha\beta)Y_t}$$

Portanto, uma fração constante da produção é consumida. A parcela restante é investida:

$$K_{t+1} = Y_t - C_t$$

Substituindo: $K_{t+1} = Y_t - (1 - \alpha\beta)Y_t$

Logo, $\boxed{K_{t+1} = \alpha\beta Y_t}$

Essas são as duas funções de política ótimas.

Caso Especial

Interpretação

O produto é dividido em duas parcelas fixas:

$$Y_t = C_t + K_{t+1}$$

Com

$$C_t = (1 - \alpha\beta)Y_t$$

e

$$K_{t+1} = \alpha\beta Y_t$$

Assim:

$1 - \alpha\beta$ = propensão média ao consumo;

$\alpha\beta$ = taxa de poupança ótima.

Esse resultado lembra o modelo de crescimento de Ramsey com utilidade logarítmica.

Caso Especial

4. Determinação do emprego

A condição intratemporal é:

$$\frac{\phi}{1 - N_t} = \frac{W_t}{C_t}$$

Pela firma competitiva,

$$W_t = (1 - \alpha) \frac{Y_t}{N_t}$$

Substituindo:

$$\frac{\phi}{1 - N_t} = \frac{(1 - \alpha)Y_t/N_t}{(1 - \alpha\beta)Y_t}$$

Caso Especial

Condição intratemporal

A Condição de Primeira Ordem para trabalho é:

$$\frac{\phi}{1 - N_t} = \frac{W_t}{C_t}$$

Sob concorrência perfeita,

$$W_t = (1 - \alpha) \frac{Y_t}{N_t}$$

Substituindo:

$$\frac{\phi}{1 - N_t} = \frac{(1 - \alpha)Y_t/N_t}{(1 - \alpha\beta)Y_t}$$

Cancelando Y_t :

$$\boxed{\frac{\phi}{1 - N_t} = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta} \frac{1}{N_t}}$$

Caso Especial

O produto cancela:

$$\frac{\phi}{1 - N_t} = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta} \frac{1}{N_t}$$

Observe algo fundamental: Y_t desaparece totalmente da equação.

Logo, os choques tecnológicos não afetam o emprego.

Caso Especial

5. Obtendo explicitamente N

Multiplicando ambos os lados por $N_t(1 - N_t)$:

$$\phi N_t = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta} (1 - N_t)$$

Defina

$$A = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta}$$

Então

$$\phi N = A(1 - N)$$

Logo,

$$\phi N + AN = A$$

$$N(\phi + A) = A$$

Caso Especial

Portanto,

$$N = \frac{A}{A + \phi}$$

Substituindo A :

$$N = \frac{\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta}}{\phi + \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta}}$$

Assim, o emprego é constante.

Caso Especial

Derivação explícita do emprego

Partimos de

$$\frac{\phi}{1 - N} = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta} \frac{1}{N}$$

Multiplicando ambos os lados por $N(1 - N)$,

$$\phi N = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta} (1 - N)$$

Expandindo:

$$\phi N = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta} - \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta} N$$

Caso Especial

Agrupando os termos em N :

$$N \left[\phi + \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta} \right] = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta}$$

Portanto,

$$N = \frac{\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta}}{\phi + \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta}}$$

Multiplicando numerador e denominador por $1 - \alpha\beta$,

$$N = \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha) + \phi(1 - \alpha\beta)}$$

Essa é a solução explícita para o emprego.

Caso Especial

Lazer ótimo

Como

$$L = 1 - N,$$

segue que

$$L = \frac{\phi(1 - \alpha\beta)}{(1 - \alpha) + \phi(1 - \alpha\beta)}$$

Caso Especial

Estática comparativa

Da solução

$$N = \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha) + \phi(1 - \alpha\beta)},$$

podemos observar:

Efeito de ϕ

$$\frac{\partial N}{\partial \phi} < 0$$

Quanto maior a preferência por lazer, menor o emprego.

Caso Especial

Efeito de β

$$\frac{\partial N}{\partial \beta} > 0$$

Consumidores mais pacientes poupam mais, acumulam mais capital e tendem a trabalhar mais.

Efeito de α

O efeito é mais sutil, pois α aparece em vários termos. Em geral, maior participação do capital reduz a participação marginal do trabalho na produção ($1 - \alpha$), tendendo a diminuir o emprego de equilíbrio.

Caso Especial

Resumo dos resultados. As políticas ótimas do modelo são

$$C_t = (1 - \alpha\beta)Y_t$$

$$K_{t+1} = \alpha\beta Y_t$$

$$N = \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha) + \phi(1 - \alpha\beta)}$$

$$L = \frac{\phi(1 - \alpha\beta)}{(1 - \alpha) + \phi(1 - \alpha\beta)}$$

Note que N e L são constantes e independentes de Z_t . Portanto, **choques tecnológicos afetam produto, consumo, investimento e capital, mas não geram flutuações do emprego**. É justamente essa propriedade que torna esse modelo um caso analítico elegante, mas empiricamente pouco adequado para explicar a pró-ciclicidade das horas trabalhadas observada nos dados.

Caso Especial

6. Por que o emprego não flutua?

Esse é o ponto central.

Observe que a condição intratemporal depende de

$$\frac{W_t}{C_t}$$

Mas:

$$W_t = (1 - \alpha) \frac{Y_t}{N_t}$$

e

$$C_t = (1 - \alpha\beta)Y_t$$

Caso Especial

Logo,

$$\frac{W_t}{C_t} = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta} \frac{1}{N_t}$$

O termo Y_t desaparece completamente.

Como os choques tecnológicos afetam Y_t , mas aparecem multiplicando simultaneamente salário e consumo, seus efeitos se anulam.

Caso Especial

7. Interpretação pelo efeito renda e substituição

Quando ocorre um choque positivo de produtividade:

$$Z_t \uparrow$$

temos

$$Y_t \uparrow$$

$$W_t \uparrow$$

$$C_t \uparrow$$

Na condição

$$\frac{\phi}{1 - N_t} = \frac{W_t}{C_t}$$

aparecem dois efeitos:

Caso Especial

Efeito substituição

$$W_t \uparrow$$

torna o lazer mais caro.

Os indivíduos querem trabalhar mais.

$$N_t \uparrow$$

Efeito renda

$$C_t \uparrow$$

reduz a utilidade marginal do consumo.

Os indivíduos ficam mais ricos e querem mais lazer.

$$N_t \downarrow$$

Caso Especial

Resultado

Com utilidade logarítmica e depreciação plena, os dois efeitos possuem exatamente a mesma magnitude.

Portanto,

$$\text{Efeito Substituição} + \text{Efeito renda} = 0$$

e

$$N_t = N$$

Caso Especial

8. Por que isso é um problema para o RBC?

Empiricamente, observa-se que: emprego flutua ao longo do ciclo; horas trabalhadas são pró-cíclicas; recessões apresentam queda no emprego; expansões apresentam aumento do emprego.

Contudo, nesse modelo: $N_t = \text{constante}$.

Logo, toda a flutuação do produto vem exclusivamente de Z_t e da acumulação de capital.

Não há margem intensiva de trabalho.

Por essa razão, esse modelo é considerado excessivamente restritivo.

Caso Especial

9. Como o RBC moderno resolve isso?

A solução usual é substituir

$$\log C + \phi \log L$$

por uma função CRRA mais geral:

$$U(C, L) = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \chi \frac{N^{1+\eta}}{1+\eta}$$

Caso Especial

Nesse caso:

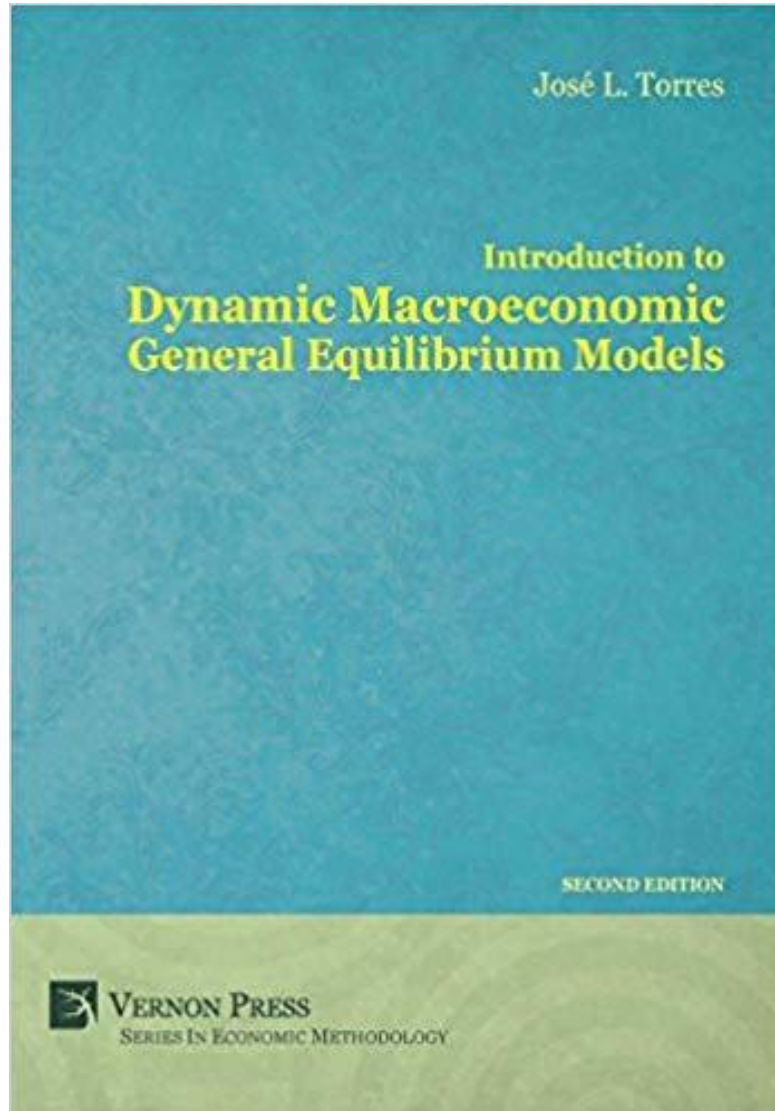
- (i) o efeito renda e o efeito substituição não se cancelam exatamente;
- (ii) as horas trabalhadas reagem aos choques tecnológicos;
- (iii) o modelo consegue gerar flutuações do emprego e do produto mais próximas dos dados.

Por isso, esse exemplo é extremamente útil didaticamente, pois produz uma solução analítica elegante,

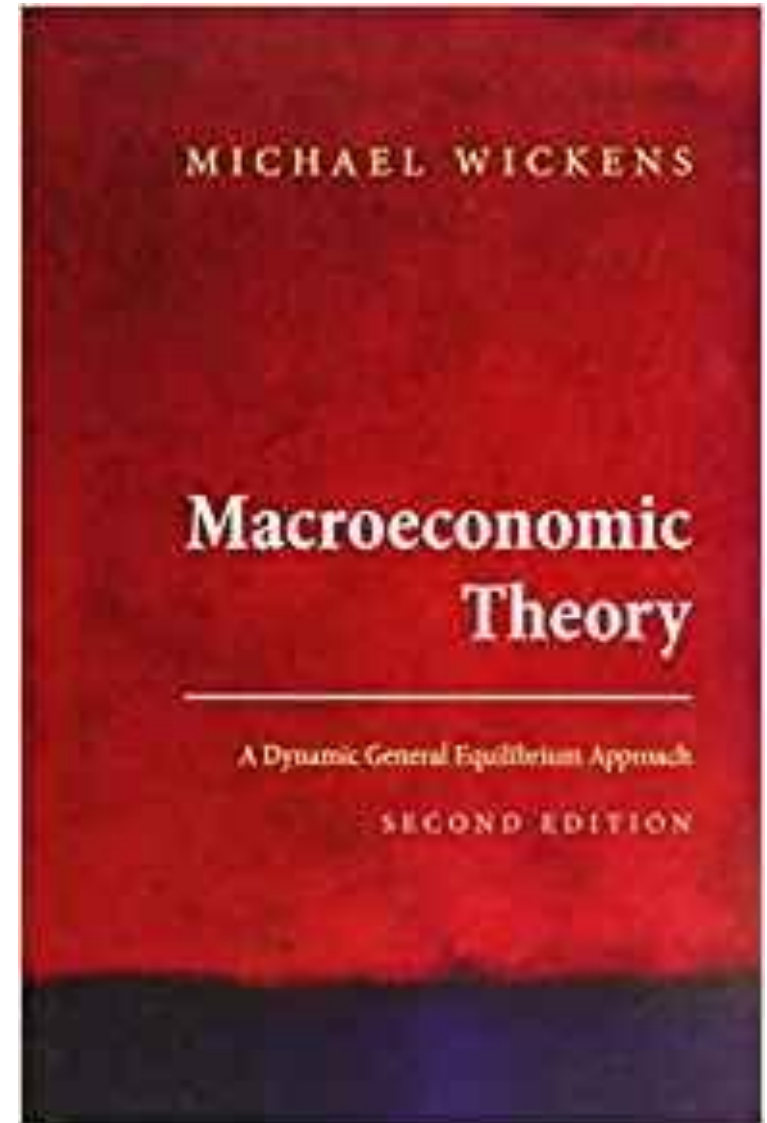
$$C_t = (1 - \alpha\beta)Y_t, K_{t+1} = \alpha\beta Y_t, N_t = \text{constante},$$

mas ao mesmo tempo evidencia uma limitação importante dos RBC mais simples: a incapacidade de gerar variações endógenas do emprego em resposta aos choques de produtividade.

Referência bibliográfica



Capítulo 1



Capítulo 1

Referências bibliográficas

COSTA FILHO. J. R. **Introdução aos Modelos DSGE**. Curso de Capacitação. Brasília, 2024.

CAVALCANTI, M. A. F. H. **Curso: Modelos DSGE – Teoria e Aplicações**. Brasília, IPEA, 2011.

Obrigado!

Contato:

PROF. DR. SÉRGIO RICARDO DE BRITO GADELHA

E-mail: sergio.gadelha@idp.edu.br e professor.sergio.Gadelha@gmail.com

Sítio eletrônico: <https://sergiorbgadelha.com.br/>

Apêndice A - Função Utilidade Aditiva Separável

Modelo RBC

Considere o problema padrão do consumidor representativo em um modelo RBC:

$$\max_{\{C_t, L_t, a_{t+1}\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\log C_t + v(L_t)]$$

sujeito à restrição orçamentária:

$$a_{t+1} = R_t a_t + W_t N_t - C_t,$$

com

$$N_t + L_t = 1.$$

Aqui:

C_t : consumo; L_t : lazer; N_t : trabalho; W_t : salário real; R_t : retorno bruto dos ativos; $\beta \in (0, 1)$: fator de desconto.

1. Derivação da Condição Intertemporal

Passo 1: Escrever o Lagrangiano. Defina λ_t como o multiplicador associado à restrição orçamentária:

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\log C_t + v(L_t) + \lambda_t (R_t a_t + W_t N_t - C_t - a_{t+1})]$$

Passo 2: Condição de primeira ordem para o consumo.
Derivando em relação a C_t :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \beta^t \left[\frac{1}{C_t} - \lambda_t \right] = 0$$

Logo:

$$\lambda_t = \frac{1}{C_t}$$

O multiplicador é a utilidade marginal da riqueza.

1. Derivação da Condição Intertemporal

Passo 3: Condição de primeira ordem para ativos

Derivando em relação a a_{t+1} :

$$-\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1} E_t[\lambda_{t+1} R_{t+1}] = 0$$

Dividindo por β^t :

$$\lambda_t = \beta E_t[R_{t+1} \lambda_{t+1}]$$

Substituindo:

$$\lambda_t = \frac{1}{C_t}, \lambda_{t+1} = \frac{1}{C_{t+1}}$$

1. Derivação da Condição Intertemporal

Temos

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \left[R_{t+1} \frac{1}{C_{t+1}} \right]$$

Essa é a **equação de Euler**.

Multiplicando ambos os lados por C_t :

$$E_t \left[\beta R_{t+1} \frac{C_t}{C_{t+1}} \right] = 1$$

Obtém-se exatamente a condição apresentada.

2. Interpretação Econômica da Eq. Euler

Considere uma redução de uma unidade no consumo hoje. A perda de utilidade é:

$$\frac{1}{C_t}$$

Essa unidade é poupada e produz R_{t+1} unidades amanhã. O ganho esperado de utilidade amanhã é:

$$\beta E_t \left[R_{t+1} \frac{1}{C_{t+1}} \right]$$

2. Interpretação Econômica da Eq. Euler

No ótimo:

custo marginal de poupar = benefício marginal esperado.

Portanto:

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \left[R_{t+1} \frac{1}{C_{t+1}} \right]$$

O agente ajusta a poupança até ficar indiferente entre consumir hoje ou transferir recursos para o futuro.

3. Elasticidade de Substituição Intertemporal

A Elasticidade de Substituição Intertemporal (EIS) mede o quanto o consumidor altera o perfil temporal de consumo diante de mudanças no retorno intertemporal.

Comecemos pela utilidade CRRA geral:

$$u(C) = \frac{C^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}.$$

A utilidade marginal é $u_C(C) = C^{-\sigma}$.

A equação de Euler torna-se: $C_t^{-\sigma} = \beta E_t[R_{t+1} C_{t+1}^{-\sigma}]$.

3. Elasticidade de Substituição Intertemporal

Ignorando incerteza para simplificar:

$$C_t^{-\sigma} = \beta R_{t+1} C_{t+1}^{-\sigma}$$

Reorganizando:

$$\left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{\sigma} = \beta R_{t+1}$$

Tomando logaritmos:

$$\sigma \ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) = \ln \beta + \ln R_{t+1}$$

3. Elasticidade de Substituição Intertemporal

Logo:

$$\ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) = \frac{1}{\sigma} (\ln \beta + \ln R_{t+1})$$

Derivando em relação ao retorno:

$$\frac{\partial \ln(C_{t+1}/C_t)}{\partial \ln R_{t+1}} = \frac{1}{\sigma}$$

Por definição,

$$EIS = \frac{1}{\sigma}$$

4. Caso Logarítmico

A utilidade logarítmica é um caso particular da CRRA.

De fato,

$$\log C = \lim_{\sigma \rightarrow 1} \frac{C^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}$$

Portanto,

$$\sigma = 1$$

Assim,

$$\boxed{\text{EIS} = 1}$$

5. Interpretação da $EIS = 1$

A EIS mede a sensibilidade do crescimento do consumo às mudanças nos retornos.

Quando $EIS = 1$, um aumento de 1% no retorno intertemporal provoca aproximadamente um aumento de 1% na razão:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t}$$

Em outras palavras, o consumidor tem uma disposição intermediária para deslocar consumo entre períodos.

Nem é extremamente rígido ($EIS < 1$), nem extremamente flexível ($EIS > 1$).

6. Relações Fundamentais

No modelo Real Business Cycle (RBC), as duas condições fundamentais do lado das famílias são:

Condição intratemporal

$$v'(L_t) = \frac{W_t}{C_t}$$

Ela determina a oferta ótima de trabalho.

O agente compara:

benefício marginal do lazer;

salário real convertido em utilidade.

6. Relações Fundamentais

Condição intertemporal

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \left[R_{t+1} \frac{1}{C_{t+1}} \right]$$

Ela determina a trajetória ótima de consumo e poupança.

7. Choques Tecnológicos

Mecanismo de transmissão dos choques tecnológicos no RBC.

Suponha um choque positivo de produtividade:

$$A_t \uparrow$$

A produção aumenta: $Y_t = A_t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha}$

Consequentemente:

(i) o salário real sobe: $W_t \uparrow$;

(ii) o produto marginal do capital sobe: $\uparrow PMgK = R_t \uparrow$

7. Choques Tecnológicos

Pela condição intratemporal:

$$v'(L_t) = \frac{W_t}{C_t}$$

o aumento de W_t torna o trabalho relativamente mais atrativo. Assim, $N_t \uparrow$.

Há mais horas trabalhadas.

Pela condição de Euler:

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \left[R_{t+1} \frac{1}{C_{t+1}} \right]$$

O aumento de R_{t+1} incentiva o adiamento do consumo.

7. Choques Tecnológicos

O agente aumenta a poupança: $S_t \uparrow$

O investimento sobe: $I_t \uparrow$

E o estoque de capital futuro cresce: $K_{t+1} \uparrow$.

8. Papel da EIS nos Modelos RBC

A EIS é um parâmetro crucial porque governa a intensidade da resposta do consumo aos choques tecnológicos.

Da versão determinística:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = (\beta R_{t+1})^{1/\sigma}$$

vemos que:

- (i) quanto maior a EIS ($1/\sigma$), mais fortemente o consumo reage às variações no retorno;
- (ii) quanto menor a EIS, mais suave é a trajetória de consumo.

8. Papel da EIS nos Modelos RBC

Por isso, nos modelos RBC clássicos de **Kydland e Prescott (1982)**, a escolha de σ é fundamental para determinar a propagação dos choques tecnológicos e a dinâmica conjunta de consumo, poupança, investimento e trabalho.

Em síntese, a condição intratemporal explica a alocação entre trabalho e lazer; a condição intertemporal explica a alocação entre consumo presente e futuro; e a EIS determina quão sensível é essa alocação temporal às mudanças nos retornos. Essas três peças formam o núcleo do comportamento das famílias em modelos RBC.

9. Log-linearização da Equação de Euler

Passo 1: Equação Determinística

Suponha inicialmente ausência de incerteza:

$$\frac{1}{C_t} = \beta R_{t+1} \frac{1}{C_{t+1}}$$

Reorganizando:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta R_{t+1}$$

Tomando logaritmos: $\ln C_{t+1} - \ln C_t = \ln \beta + \ln R_{t+1}$.

Definindo $c_t \equiv \ln C_t$, obtemos $c_{t+1} - c_t = \ln \beta + \ln R_{t+1}$.

9. Log-linearização da Equação de Euler

Passo 2: Linearização ao redor do estado estacionário

No estado estacionário:

$$\bar{R} = \frac{1}{\beta}$$

Logo,

$$\ln \beta + \ln \bar{R} = 0$$

Definimos desvios logarítmicos:

$$\hat{c}_t = \ln C_t - \ln \bar{C}$$

$$\hat{r}_t = \ln R_t - \ln \bar{R}$$

9. Log-linearização da Equação de Euler

Substituindo e desprezando termos de ordem superior:

$$E_t(\hat{c}_{t+1}) - \hat{c}_t = E_t(\hat{r}_{t+1})$$

Ou

$$\hat{c}_t = E_t(\hat{c}_{t+1}) - E_t(\hat{r}_{t+1})$$

Essa é a forma log-linear da Equação de Euler para utilidade logarítmica.

Caso CRRA Geral

Com

$$u(C) = \frac{C^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

a equação de Euler é:

$$C_t^{-\sigma} = \beta E_t[R_{t+1} C_{t+1}^{-\sigma}]$$

A versão log-linear torna-se:

$$\hat{c}_t = E_t(\hat{c}_{t+1}) - \frac{1}{\sigma} E_t(\hat{r}_{t+1})$$

ou

$$E_t(\Delta \hat{c}_{t+1}) = \frac{1}{\sigma} E_t(\hat{r}_{t+1})$$

Caso CRRA Geral

Onde

$$\frac{1}{\sigma}$$

é precisamente a Elasticidade de Substituição Intertemporal (EIS).

Como no caso logarítmico $\sigma = 1$:

$$EIS = 1$$

Portanto:

$$E_t(\Delta \hat{c}_{t+1}) = E_t(\hat{r}_{t+1})$$

10. Choque Tecnológico no Modelo RBC

Considere a função de produção agregada:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha},$$

onde A_t representa a produtividade total dos fatores.

Um choque tecnológico positivo significa: $A_t \uparrow$.

10. Choque Tecnológico no Modelo RBC

Efeito sobre a produção

A produção aumenta imediatamente:

$$Y_t \uparrow$$

Gráfico típico dos modelos RBC:

$$A_t \uparrow \Rightarrow Y_t \uparrow$$

10. Choque Tecnológico no Modelo RBC

Efeito sobre o salário

O salário real é:

$$W_t = (1 - \alpha) \frac{Y_t}{N_t}$$

Logo:

$$A_t \uparrow \Rightarrow W_t \uparrow$$

Pela condição intratemporal:

$$v'(L_t) = \frac{W_t}{C_t}$$

o aumento do salário eleva o custo de oportunidade do lazer.

10. Choque Tecnológico no Modelo RBC

Assim:

$$L_t \downarrow$$

$$N_t \uparrow$$

Os indivíduos trabalham mais.

Esse é o mecanismo de substituição trabalho-lazer do RBC.

10. Choque Tecnológico no Modelo RBC

Efeito sobre o retorno do capital

O retorno do capital é:

$$R_{t+1} = \alpha A_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta$$

Um choque tecnológico aumenta a produtividade do capital:

$$R_{t+1} \uparrow$$

10. Choque Tecnológico no Modelo RBC

Efeito sobre a Equação de Euler

Da forma log-linear: $E_t(\Delta \hat{c}_{t+1}) = E_t(\hat{r}_{t+1})$

Quando: $\hat{r}_{t+1} > 0$

Temos: $E_t(\Delta \hat{c}_{t+1}) > 0$

Logo: $E_t(c_{t+1}) > c_t$

10. Choque Tecnológico no Modelo RBC

Os agentes desejam consumir relativamente mais no futuro.

Consequentemente:

$$S_t \uparrow$$

$$I_t \uparrow$$

A poupança e o investimento aumentam.

10. Choque Tecnológico no Modelo RBC

Acumulação de capital

O capital segue:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$$

Como $I_t \uparrow$

segue que $K_{t+1} \uparrow$

O choque tecnológico produz efeitos persistentes porque ele aumenta o estoque de capital futuro.

Esse é um dos principais mecanismos de propagação dos ciclos no modelo RBC.

11. Sistema Básico do Modelo RBC

Sistema básico do RBC em forma log-linear. O núcleo do modelo pode ser resumido por:

Produção: $\hat{y}_t = \hat{a}_t + \alpha \hat{k}_t + (1 - \alpha) \hat{n}_t$

Equação de Euler: $\hat{c}_t = E_t(\hat{c}_{t+1}) - E_t(\hat{r}_{t+1})$

Oferta de trabalho: $\hat{w}_t = \hat{c}_t + \phi \hat{n}_t$

(para uma forma funcional específica de $v(L)$)

Acumulação de capital: $\hat{k}_{t+1} = (1 - \delta) \hat{k}_t + \delta \hat{i}_t$

Processo tecnológico: $\hat{a}_t = \rho \hat{a}_{t-1} + \varepsilon_t$

12. Condição de Transversalidade

Condição de Transversalidade (No-Ponzi Condition). A equação de Euler é necessária, mas não suficiente para caracterizar a solução ótima. É preciso impor a condição de transversalidade.

Partindo da restrição intertemporal, obtém-se:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E_t [\beta^T \lambda_{t+T} a_{t+T+1}] = 0$$

Como:

$$\lambda_t = \frac{1}{C_t}$$

Segue:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E_t \left[\beta^T \frac{a_{t+T+1}}{C_{t+T}} \right] = 0$$

12. Condição de Transversalidade

Interpretação econômica. A condição de transversalidade exige que a riqueza acumulada no infinito tenha valor presente nulo.

Ou seja:

$$PV(\text{riqueza terminal}) = 0$$

Ela impede que o agente financie consumo através de um esquema Ponzi, no qual a dívida cresce indefinidamente.

Sem essa condição, poderia ocorrer:

$$a_t \rightarrow -\infty$$

com o consumidor tomando empréstimos eternamente sem jamais liquidá-los.

13. Três Condições Fundamentais do RBC

O comportamento da família representativa é caracterizado por:

Condição intratemporal determina a oferta de trabalho.

$$v'(L_t) = \frac{W_t}{C_t}$$

Condição intertemporal (Euler) determina consumo e poupança.

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \left[R_{t+1} \frac{1}{C_{t+1}} \right]$$

Condição de transversalidade elimina trajetórias explosivas de dívida e garante a optimalidade global.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E_t \left[\beta^T \frac{a_{t+T+1}}{C_{t+T}} \right] = 0$$

13. Três Condições Fundamentais do RBC

Em conjunto, essas três condições constituem o sistema de equilíbrio dinâmico do lado das famílias no modelo RBC. Um choque tecnológico positivo eleva salários e retornos do capital, induz mais trabalho, mais poupança e mais investimento, enquanto a equação de Euler e a condição de transversalidade determinam a trajetória ótima de consumo e riqueza ao longo do tempo.

Apêndice B - Função Utilidade CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*)

1. Função Utilidade CRRA

Considere a utilidade CRRA (Constant Relative Risk Aversion) separável entre consumo e lazer:

$$U(C_t, L_t) = \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + v(L_t), \sigma > 0$$

Nessa especificação:

σ é o coeficiente de aversão relativa ao risco;

$1/\sigma$ é a elasticidade de substituição intertemporal (EIS);

O caso $\sigma = 1$ gera a utilidade logarítmica.

2. Problema da Família

A família representativa resolve:

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + v(L_t) \right]$$

sujeito à restrição orçamentária:

$$a_{t+1} = R_t a_t + W_t N_t - C_t$$

A Função Lagrangeana é:

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + v(L_t) + \lambda_t (R_t a_t + W_t N_t - C_t - a_{t+1}) \right]$$

3. Derivação da Equação de Euler

Passo 1: condição de primeira ordem em relação ao consumo

Derivando a Função Lagrangeana em relação a C_t :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \beta^t (C_t^{-\sigma} - \lambda_t) = 0$$

Logo,

$$\boxed{\lambda_t = C_t^{-\sigma}}$$

A utilidade marginal do consumo é

$$U_C(C_t) = C_t^{-\sigma}$$

3. Derivação da Equação de Euler

Passo 2: condição de primeira ordem em relação ao ativo

Derivando em relação a a_{t+1} : $-\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1} E_t[R_{t+1} \lambda_{t+1}] = 0$

Dividindo por β^t : $\lambda_t = \beta E_t[R_{t+1} \lambda_{t+1}]$

Substituindo $\lambda_t = C_t^{-\sigma}$, obtemos:

$$\boxed{C_t^{-\sigma} = \beta E_t[R_{t+1} C_{t+1}^{-\sigma}]}$$

Esta é a **equação de Euler do modelo RBC com utilidade CRRA**.

4. Forma Equivalente

Dividindo ambos os lados por $C_t^{-\sigma}$:

$$1 = \beta E_t \left[R_{t+1} \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \right]$$

ou

$$1 = \beta E_t \left[R_{t+1} \left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^{\sigma} \right]$$

Essa forma evidencia a relação entre crescimento do consumo e retorno dos ativos.

5. Caso Determinístico

Sem incerteza: $C_t^{-\sigma} = \beta R_{t+1} C_{t+1}^{-\sigma}$.

Logo,

$$\left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{\sigma} = \beta R_{t+1}$$

e

$$\boxed{\frac{C_{t+1}}{C_t} = (\beta R_{t+1})^{1/\sigma}}$$

Essa expressão mostra diretamente que:

retornos maiores elevam o crescimento do consumo;

quanto maior for a EIS ($1/\sigma$), mais forte será essa resposta.

6. Caso Particular: Utilidade Logarítmica

Quando $\sigma = 1$, a utilidade torna-se:

$$u(C) = \log C .$$

A equação de Euler reduz-se para:

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \left[R_{t+1} \frac{1}{C_{t+1}} \right]$$

ou

$$E_t \left[\beta R_{t+1} \frac{C_t}{C_{t+1}} \right] = 1$$

7. Restrição de Recursos no Modelo RBC

Passemos agora ao lado da produção.

A firma opera com tecnologia Cobb-Douglas:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha}$$

onde:

A_t = produtividade total dos fatores;

K_t = capital;

N_t = trabalho;

Y_t = produto.

7. Restrição de Recursos no Modelo RBC

O capital evolui conforme:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$$

em que:

I_t = investimento;

δ = taxa de depreciação.

7. Restrição de Recursos no Modelo RBC

Restrição agregada da economia

Como não existe governo nem setor externo no RBC básico, toda a produção deve ser destinada ao consumo ou ao investimento:

$$Y_t = C_t + I_t$$

Substituindo

$$I_t = K_{t+1} - (1 - \delta)K_t$$

obtemos

$$Y_t = C_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t$$

Portanto,

$$C_t + K_{t+1} = A_t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha} + (1 - \delta)K_t$$

Essa é a forma mais utilizada da **restrição de recursos do modelo RBC**, pois elimina a variável investimento.

8. Sistema Fundamental do RBC

O equilíbrio competitivo do RBC básico pode ser resumido por:

Produção: $Y_t = A_t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha}$

Equação de Euler: $C_t^{-\sigma} = \beta E_t[R_{t+1} C_{t+1}^{-\sigma}]$

Condição intratemporal: $v'(L_t) = W_t C_t^{-\sigma}$

Acumulação de capital: $K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$

Restrição de recursos: $Y_t = C_t + I_t$

Ou $C_t + K_{t+1} = A_t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha} + (1 - \delta)K_t$

8. Sistema Fundamental do RBC

Condição de transversalidade

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E_t [\beta^T C_{t+T}^{-\sigma} K_{t+T+1}] = 0$$

Essas equações constituem o núcleo matemático do modelo RBC de Kydland-Prescott e permitem caracterizar conjuntamente as trajetórias de consumo, trabalho, investimento, capital e produto diante de choques tecnológicos.

Apêndice C – Condição Intertemporal para Lazer

1. Partindo da Condição Intertemporal

Suponha a utilidade $U(C_t, L_t) = \log C_t + \phi \log L_t$.

Nesse caso, $v(L_t) = \phi \log L_t$ e:

$$v'(L_t) = \frac{\phi}{L_t}$$

A condição intratemporal é:

$$v'(L_t) = \frac{W_t}{C_t}$$

1. Partindo da Condição Intertemporal

Substituindo $v'(L_t)$:

$$\frac{\phi}{L_t} = \frac{W_t}{C_t}$$

Rearranjando:

$$\boxed{\phi C_t = W_t L_t}$$

Ou, equivalentemente:

$$\boxed{C_t = \frac{W_t L_t}{\phi}}$$

Essa expressão estabelece uma relação direta entre consumo, salário real e lazer.

2. Substituindo na Equação de Euler

A equação de Euler com utilidade logarítmica é:

$$E_t \left[\beta R_{t+1} \frac{C_t}{C_{t+1}} \right] = 1$$

Substituindo

$$C_t = \frac{W_t L_t}{\phi}$$

e

$$C_{t+1} = \frac{W_{t+1} L_{t+1}}{\phi}$$

2. Substituindo na Equação de Euler

Obtemos:

$$E_t \left[\beta R_{t+1} \frac{W_t L_t / \phi}{W_{t+1} L_{t+1} / \phi} \right] = 1$$

Os termos ϕ cancelam:

$$E_t \left[\beta \left(R_{t+1} \frac{W_t}{W_{t+1}} \right) \frac{L_t}{L_{t+1}} \right] = 1$$

Esta é a **equação de Euler do lazer**.

3. Interpretação Econômica

Escrevendo-a de forma mais intuitiva:

$$1 = E_t \left[\beta \underbrace{\left(R_{t+1} \frac{W_t}{W_{t+1}} \right)}_{\text{retorno do adiamento do lazer}} \frac{L_t}{L_{t+1}} \right]$$

Observe que o termo central:

$$R_{t+1} \frac{W_t}{W_{t+1}}$$

é uma espécie de **preço relativo intertemporal do lazer**.

3. Interpretação Econômica

O salário é o custo de oportunidade do lazer:

(i) uma hora de lazer hoje custa W_t ;

(ii) uma hora de lazer amanhã custa W_{t+1} .

Portanto:

$$\frac{W_t}{W_{t+1}}$$

mede como varia o custo do lazer ao longo do tempo.

3. Interpretação Econômica

Analogia com a equação de Euler do consumo

Para o consumo: βR_{t+1} é o retorno de transferir recursos do presente para o futuro.

Para o lazer:

$$\beta R_{t+1} \frac{W_t}{W_{t+1}}$$

é o retorno de transferir uma hora de lazer do presente para o futuro.

Assim, a família escolhe não apenas quando consumir, mas também quando trabalhar.

4. Choque Tecnológico Positivo

Suponha que ocorra um aumento persistente da produtividade:

$$A_t \uparrow.$$

Isso aumenta:

$$W_t \uparrow, R_t \uparrow.$$

Mas o ponto crucial é comparar os aumentos de W_t , W_{t+1} e R_{t+1} .

.

4. Choque Tecnológico Positivo

Caso 1: o retorno aumenta mais que os salários futuros

Suponha:

$$R_{t+1} \frac{W_t}{W_{t+1}} \uparrow$$

A condição de Euler exige que:

$$\frac{L_t}{L_{t+1}} \downarrow$$

Logo:

$$L_t < L_{t+1}$$

4. Choque Tecnológico Positivo

Isto significa:

- (i) menos lazer hoje;
- (ii) mais lazer amanhã.

Como $N_t = 1 - L_t$, segue que $N_t > N_{t+1}$.

Ou seja:

mais trabalho hoje e mais lazer amanhã
--

4. Choque Tecnológico Positivo

Intuição

Uma hora trabalhada hoje gera renda que pode ser investida à taxa R_{t+1} .

Se o retorno dessa poupança é muito elevado, torna-se vantajoso abrir mão de lazer hoje.

O indivíduo raciocina da seguinte forma:

"Se eu trabalhar mais agora, posso acumular riqueza e desfrutar mais lazer no futuro."

Essa é uma forma intertemporal de substituição trabalho-lazer.

5. Relação com a Oferta de Trabalho no RBC

A análise usual do RBC enfatiza a condição intratemporal:

$$\frac{\phi}{L_t} = \frac{W_t}{C_t}$$

Nela aparecem:

Efeito substituição

$W_t \uparrow$ torna o lazer mais caro. Logo, $L_t \downarrow$.

5. Relação com a Oferta de Trabalho no RBC

Efeito renda

$C_t \uparrow$ reduz a utilidade marginal do consumo. Logo, $L_t \uparrow$.

5. Relação com a Oferta de Trabalho no RBC

Já a equação de Euler do lazer acrescenta uma dimensão intertemporal:

$$E_t \left[\beta \left(R_{t+1} \frac{W_t}{W_{t+1}} \right) \frac{L_t}{L_{t+1}} \right] = 1.$$

Agora o agente compara:

- (i) lazer hoje;
- (ii) lazer amanhã.

Portanto, aparecem dois tipos de substituição:

- (i) Intratemporal:** lazer versus trabalho no mesmo período;
- (ii) Intertemporal:** lazer hoje versus lazer amanhã.

6. Conclusão

Ao combinar a condição intratemporal

$$\phi C_t = W_t L_t$$

com a equação de Euler do consumo, obtém-se

$$E_t \left[\beta \left(R_{t+1} \frac{W_t}{W_{t+1}} \right) \frac{L_t}{L_{t+1}} \right] = 1.$$

Essa expressão mostra que a decisão de oferta de trabalho no modelo RBC é fundamentalmente **intertemporal**. Um choque tecnológico favorável eleva salários e retornos do capital. Se o retorno de trabalhar hoje e investir a renda excede o aumento esperado do custo do lazer no futuro, os agentes reduzem o lazer corrente, aumentam o trabalho corrente e transferem parte do lazer para períodos futuros. Essa é uma das explicações centrais para a pró-ciclicidade do emprego e das horas trabalhadas nos modelos RBC de Kydland e Prescott.