

Macroeconomia Avançada

Aula 7(a): Introdução aos Modelos de Equilíbrio Geral Dinâmico e Estocástico (*DSGE - Dynamic Stochastic General Equilibrium Models*)

Informativo

Essa nota de aula é um resumo dos principais tópicos constantes nas referências bibliográficas da disciplina Macroeconomia Avançada, lecionada no Programa de Doutorado e Mestrado em Economia do Instituto Brasileiro de Ensino, Desenvolvimento e Pesquisa (IDP).

Eu destaco que essa nota de aula não tem fins comerciais, servindo exclusivamente como material de apoio às aulas dessa disciplina.

Quaisquer erros e omissões são de minha inteira responsabilidade.

Contribuições e considerações podem ser enviadas para:

sergio.gadelha@idp.edu.br ou
professor.sergio.gadelha@gmail.com

1. Motivação

2. Otimização Dinâmica com Lagrangeanos

3. Log-linearização

Objetivo do Curso

D_{ynamic}

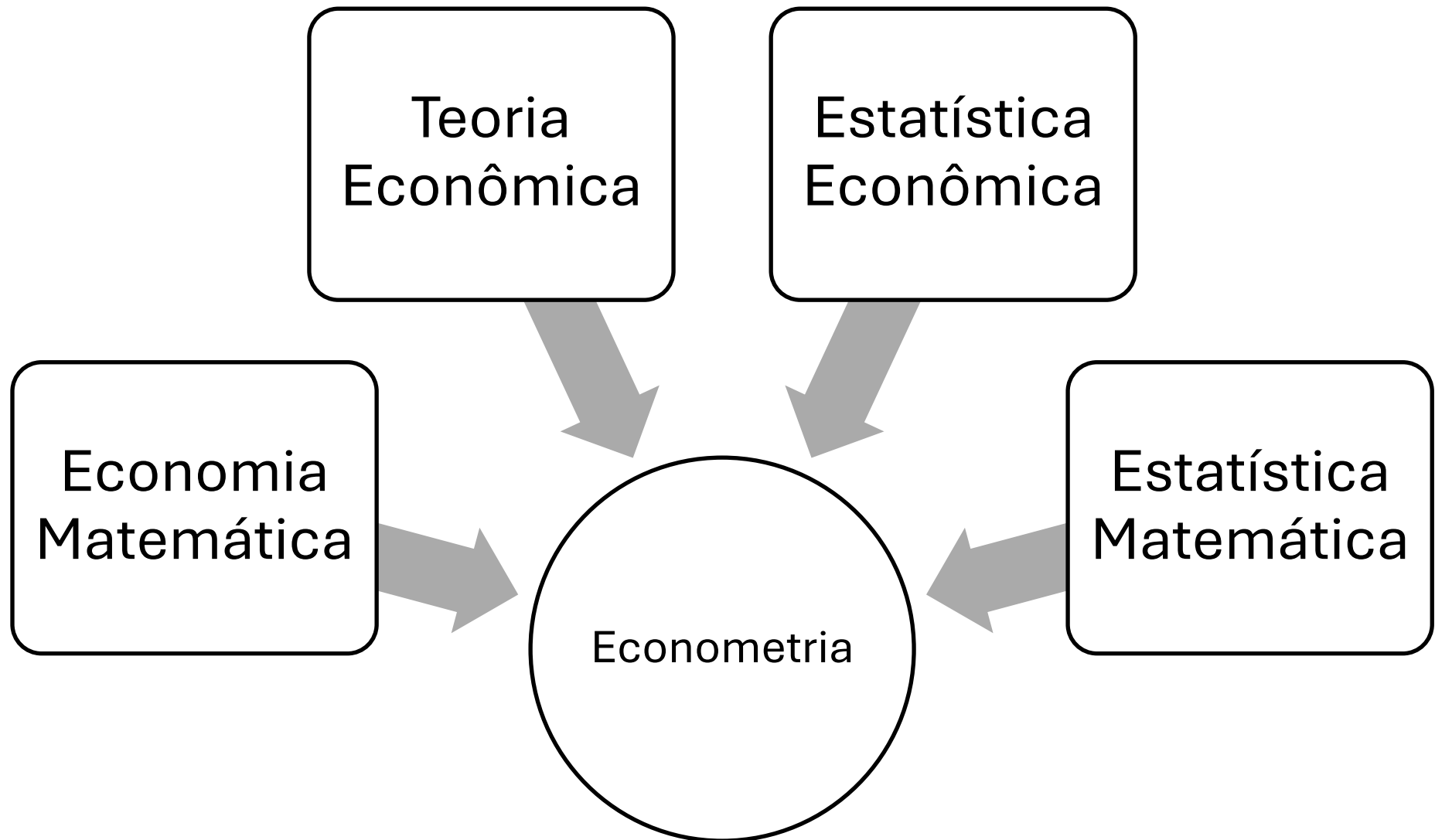
S_{tochastic}

G_{eneral} E_{quilibrium}

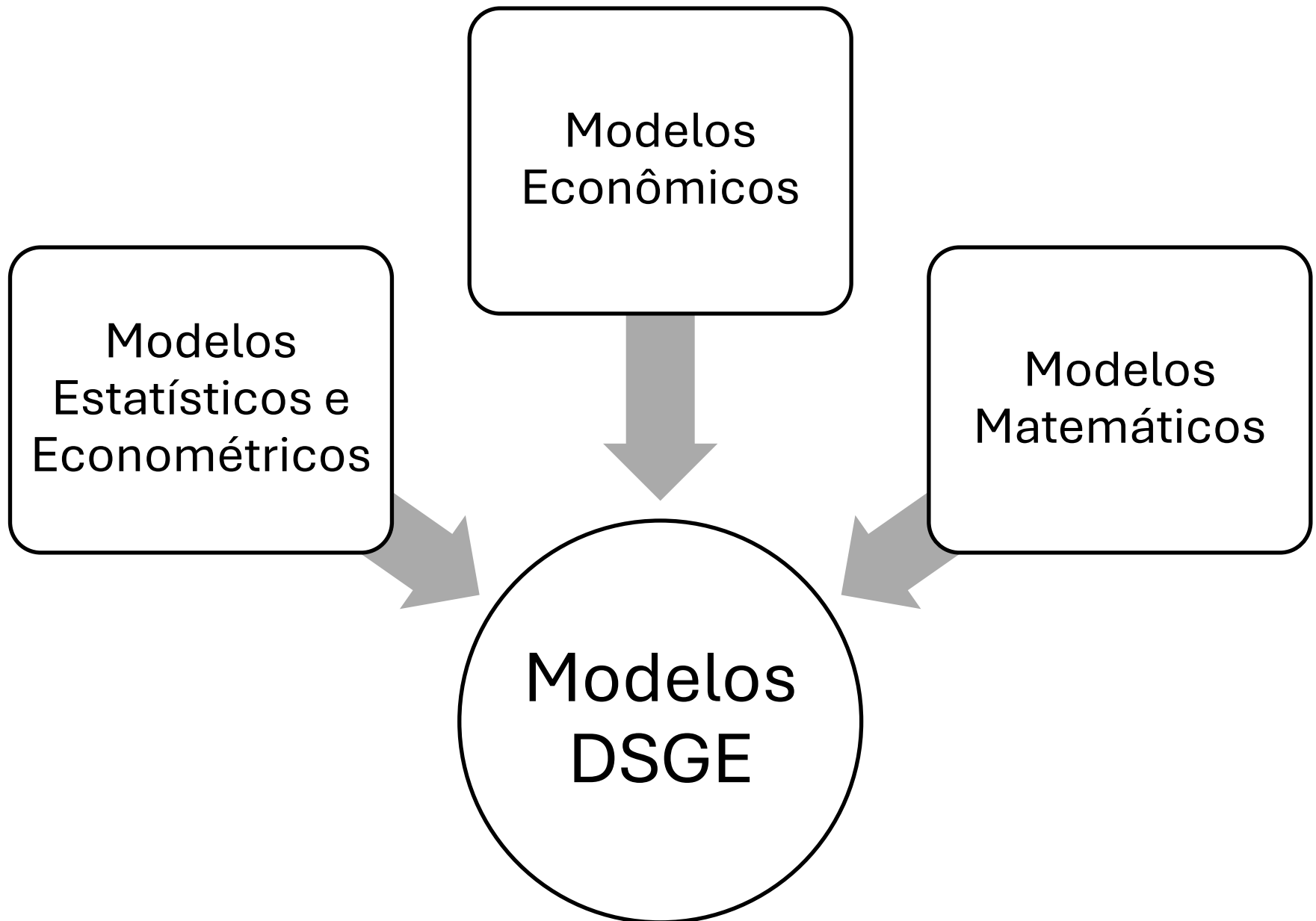
O objetivo central é apresentar uma introdução aos fundamentos teóricos e as técnicas para solução, estimação e simulação de Modelos de Equilíbrio Geral Dinâmicos e Estocásticos (Modelos DSGE), com foco no uso do pacote de rotinas *Dynare*, executadas nos *softwares* Matlab, Octave ou JULIA.

Matemática, Estatística e Economia se encontram!

Convergência das disciplinas!



Convergência dos **modelos**!



O que é um Modelo Estatístico?

**O que é um Espaço de Probabilidade ou
Modelo Probabilístico?**

Espaço de Probabilidades ou **Modelo Probabilístico**

Um **Espaço de Probabilidade** ou **Modelo Probabilístico** é uma abstração matemática, ou seja, trata-se de uma idealização que busca representar os fenômenos aleatórios.

Definição: um **espaço de probabilidades** ou **modelo probabilístico** é um trio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, isto é, possui três componentes básicas, em que:

- **Espaço amostral** (Ω): conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Espaço de Probabilidades ou Modelo Probabilístico

► Trata-se de um **conjunto não-vazio** Ω , cujos elementos representam todos os resultados possíveis de um determinado experimento aleatório. O experimento aleatório é dado pela escolha de algum dos possíveis $\omega \in \Omega$, e dizemos que o ω escolhido representa a realização do experimento.

Espaço de Probabilidades ou Modelo Probabilístico

- σ – *algebra* de eventos mensuráveis ($\mathcal{F}$): trata-se de uma classe apropriada $\mathcal{F}$ de subconjuntos do espaço amostral, chamada classe de conjuntos mensuráveis ou eventos aleatórios.
- $\mathcal{P}$: **medida de probabilidade** com $\mathcal{P}(\Omega) = 1$. Trata-se de uma função $\mathcal{P}$ que associa a cada conjunto mensurável um número real, que representa a ideia de chance, verossimilhança, confiança, credibilidade ou probabilidade. Esta função é chamada de probabilidade, medida ou medida de probabilidade.

Espaço de Probabilidades ou Modelo Probabilístico

- **Resultados equiprováveis.** Em um modelo em que os resultados são equiprováveis, o espaço amostral é um conjunto finito Ω , e a medida de probabilidade é proporcional à quantidade de resultados que fazem parte de um dado evento. Por exemplo:

$$\mathcal{P}(B) = \frac{\#B}{\#\Omega}$$

Onde $\#B$ denota a quantidade de elementos que pertence a B , isto é, denota a cardinalidade do conjunto $B \subseteq \Omega$.

Espaço de Probabilidades ou Modelo Probabilístico

- Exemplo: considere o lançamento de um dado em que um jogador precisa obter 5 ou 6. Neste caso, nós teremos:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{5, 6\}$$

$$\mathcal{P}(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \cong 0,33 \cong 33\%$$

O que é um **Modelo Estatístico**?

Definição: considere o resultado observado de um experimento estatístico seja uma amostra $X_1, \dots, X_n$ de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas em algum espaço mensurável Ω (usualmente $\Omega \in \mathbb{R}$), e denote por $\mathbb{P}$ sua distribuição de probabilidade comum. Um **modelo estatístico associado a um experimento estatístico é um par**:

$$(\Omega, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta})$$

Em que:

Ω é o espaço amostral para X , isto é, o conjunto que contém todos os possíveis resultados de X ;

$(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ é uma família de distribuições de probabilidade no espaço amostral Ω ;

Θ é o conjunto de parâmetros, isto é, o conjunto de alguns possíveis valores de θ .

Modelo Estatístico

$(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$

$\mathbb{P}$

Ω

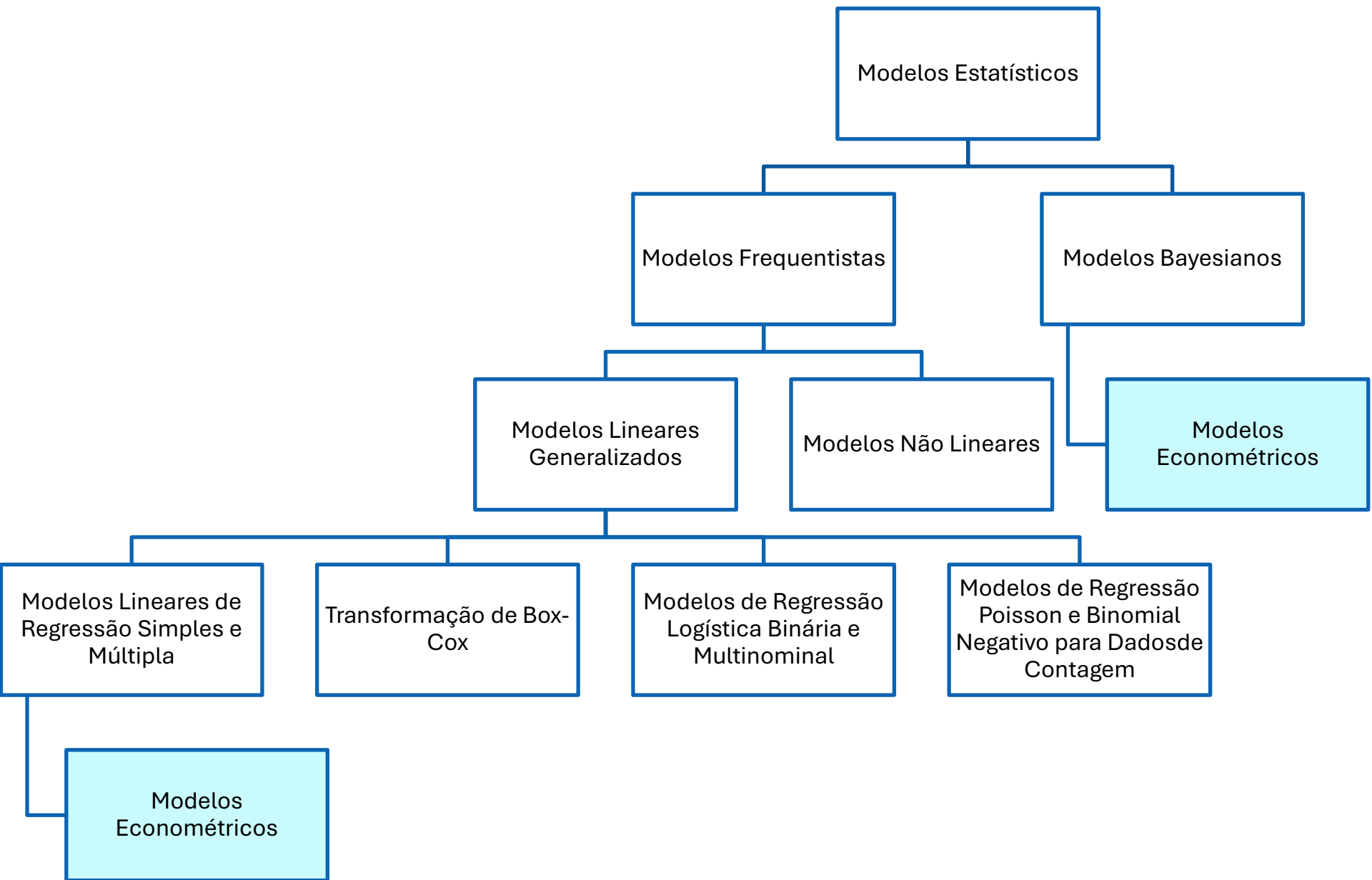
Modelo Estatístico

Usualmente, assume-se que esse modelo estatístico é bem especificado, isto é, esse modelo é definido de tal forma que $\exists \theta$ em que $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\theta$.

O termo θ é conhecido por “parâmetro verdadeiro”, e é desconhecido. O objetivo do experimento estatístico é estimar o coeficiente estatístico (ou a estatística) $\hat{\theta}$, ou checar suas propriedades.

Modelo Estatístico

Em teoria das probabilidades e estatística, uma sequência de variáveis aleatórias é **independente e identicamente distribuída** se cada variável aleatória tiver a **mesma distribuição de probabilidades** das outras e todas foram mutuamente independentes.



Por que a matemática importa para a estatística?

- ▶ A **modelagem estatística** tem por objetivo descrever como um resultado Y depende dos insumos X sob incertezas.
- ▶ Para fazer isso rigorosamente, nós necessitamos:
 - **Probabilidade** para modelar aleatoriedade e incerteza;
 - **Álgebra linear** para expressar modelos na forma de vetores e matrizes.
 - **Cálculo e otimização** para ajustar modelos por meio de minimização de perdas ou maximização de verossimilhança.
 - **Ferramentas assintóticas** (por exemplo, trajetórias de derivadas) para entender estimadores e construir inferências válidas.
- ▶ O objetivo não é a matemática em si, mas sim a matemática como uma linguagem para projetar, ajustar e interpretar modelos estatísticos.

Por que a probabilidade é essencial?

- ▶ Um **modelo estatístico** é fundamentalmente um **modelo probabilístico** para (Y, X) .
- ▶ Escreve-se $(Y|X) \sim p(y|x; \theta)$ para expressar:
 - A **relação estocástica** entre Y e X ;
 - Os **parâmetros** θ que se quer estimar.
- ▶ Links para a modelagem estatística:
 - **Regressão linear:** $(Y|X) \sim N(X\beta, \sigma^2)$
 - **Regressão logística:** $(Y|X) \sim \text{Bernoulli}(\pi(X))$ com $\log\{\pi(X)/[1 - \pi(X)]\} = X\beta$
 - **Modelos Lineares Generalizados:** assume-se que Y pertence a uma família de distribuições exponenciais.

Por que a probabilidade é essencial?

Modelo Estatístico

Modelo Probabilístico

O que é um Modelo Matemático?

Definição Formal de Modelo Matemático

- ▶ Um modelo matemático é uma descrição de um sistema em linguagem matemática, na qual as propriedades essenciais do sistema são representadas por variáveis e suas inter-relações são expressas por equações, inequações, funções ou outras estruturas matemáticas.
- ▶ De maneira mais completa, especialmente em economia, engenharia e ciências aplicadas, um modelo pode ser escrito como:

$$F(x, \theta) = 0$$

ou

$$y = f(x, \theta)$$

onde:

- x é o vetor de variáveis explicativas (ou de estado);
- θ é o vetor de parâmetros;
- y é a variável de interesse;
- $f(\cdot)$ representa a estrutura funcional que caracteriza o fenômeno estudado.

Definição na linguagem de Teoria dos Conjuntos

- A formulação mais rigorosa utiliza conceitos de teoria dos conjuntos. Sejam:

$X \subseteq \mathbb{R}^n$: o conjunto dos estados possíveis do sistema;

$\Theta \subseteq \mathbb{R}^m$: o conjunto dos parâmetros admissíveis;

Um modelo matemático é uma relação $F: X \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que os estados admissíveis do sistema satisfazem $F(x, \theta) = 0$.

O conjunto $\mathcal{S} = \{x \in X: F(x, \theta) = 0\}$ é denominado **conjunto de soluções** do modelo.

Elementos Fundamentais de Modelo Matemático

Segundo a literatura de modelagem matemática, um modelo normalmente contém:

1. Variáveis

- Quantidades que podem assumir diferentes valores.
- Exemplo: renda, consumo, temperatura, população.

2. Parâmetros

- Constantes que caracterizam o sistema.
- Exemplo: taxa de crescimento populacional, elasticidade, taxa de depreciação.

3. Relações funcionais. Equações ou funções que descrevem a interação entre as variáveis. Exemplo:

$$C = a + bY$$

4. Hipóteses ou pressupostos. Simplificações necessárias para tornar o problema tratável. Exemplo: concorrência perfeita, retornos constantes de escala, população homogênea.

5. Condições iniciais e restrições. Determinam o conjunto de soluções admissíveis.

Objetivos dos Modelos Matemáticos

A literatura geralmente atribui quatro funções principais aos modelos matemáticos:

1. **Descrição.** Representar formalmente um fenômeno observado. Exemplo:

$$P = a - bQ$$

representa uma curva de demanda.

2. **Explicação.** Identificar os mecanismos causais que geram determinado comportamento observado.

3. **Previsão.** Utilizar a estrutura do modelo para antecipar estados futuros do sistema. Exemplo:

$$Y_{t+1} = Y_t(1 + g)$$

4. **Prescrição ou otimização.** Determinar decisões ótimas segundo algum critério. Exemplo:

$$\max_{c_t} U(c_t)$$

nos modelos de crescimento econômico e programação dinâmica.

Características Desejáveis dos Modelos Matemáticos

Um bom modelo matemático deve apresentar:

- consistência lógica;
- coerência interna;
- simplicidade (parcimônia);
- capacidade explicativa;
- capacidade preditiva;
- possibilidade de validação empírica.

George Box resumiu essa ideia em uma frase clássica:

“Todos os modelos são errados, mas alguns são úteis.”

Ou seja, nenhum modelo reproduz integralmente a realidade; sua utilidade depende de sua capacidade de capturar os aspectos essenciais do fenômeno analisado.

Definição Epistemológica Moderna

► A literatura contemporânea em filosofia da ciência entende que modelos matemáticos são **representações idealizadas**.

► Um modelo nunca reproduz integralmente a realidade. Ele seleciona apenas características consideradas essenciais para determinado propósito analítico. Formalmente:

$$M \neq S,$$

mas espera-se que exista alguma correspondência

$$M \approx S$$

em relação às propriedades de interesse.

► Assim, a qualidade de um modelo é julgada não pela sua veracidade literal, mas por sua capacidade de:

- explicar;
- prever;
- organizar evidências;
- realizar experimentos contrafactuais;
- orientar decisões.

O que é um Modelo Macroeconômico?

Modelo Macroeconômico

A estrutura básica de um **modelo macroeconômico** (ou **economia artificial**) é definida no sistema de equações:

$$X_t = E_t[F(X_{t+1}, Z_t, \theta, u_t)] \text{ e } Z_t = G(Z_{t-1}, \xi_t)$$

E_t : operador de expectativas

X_t : vetor de variáveis endógenas

Z_t : vetor de variáveis exógenas

u_t e ξ_t : vetores de perturbações (distúrbios, choques) aleatórias com funções de densidade de probabilidade bem definidas. Vetores de choques estruturais.

$F(\cdot)$: essa função define a teoria econômica

$G(\cdot)$: essa função define as regras de políticas

θ : vetor de parâmetros estruturais

$$U = E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \frac{(C_t^\lambda (1 - H_t)^{1-\lambda})^{1-\tau}}{1 - \tau\tau}$$

C_t : consumo

$$Y_t = C_t + I_t$$

H_t : Horas Trabalhadas

Y_t : Produto

$$Y_t = e^{z_t} K_t^\alpha H_t^{1-\alpha}$$

K_t : Capital

$$K_t = I_t + (1 - \delta)K_t$$

I_t : Investimentos

$$z_t = z_{t-1} + \varepsilon_t, |\rho| < 1$$

z_t : Choques Tecnológicos

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

ε_t : Choques exógenos

$$\theta = (\beta, \lambda, \tau, \alpha, \delta, \rho, \sigma_u^2)$$

parâmetros
estruturais

Modelo Macroeconômico

A solução do sistema dinâmico é uma **regra de decisão**:

$$\underbrace{X_t = r(X_{t-1}, u_t; \theta)}_{\substack{\text{função} \\ \text{política}}}$$

Há três abordagens históricas usadas para caracterizar o equilíbrio dinâmico:

- ▶ Iteração da equação de Bellman: **Programação Dinâmica** (Christiano, 1990)
- ▶ **Métodos de aproximação em torno do estado estacionário: log-linearização das condições de equilíbrio** (King, Plosser, Rebelo, 2002)
- ▶ aproximação quadrática linear do modelo (Kydland e Prescott, 1982)

As duas primeiras abordagens são as mais usadas.

(i) Programação Dinâmica

Em Modelos DSGE, o equilíbrio competitivo é ótimo de Pareto (**por definição do Primeiro Teorema do Bem-Estar**), e pode-se aplicar o princípio de programação dinâmica.

Ou seja, se os mercados são competitivos, a alocação é Paretiana.

Programação Dinâmica e Iterações da Equação de Bellman são empregados para computar a função valor (equação funcional) e a função política (regras de política), dada a existência de unicidade.

A equação funcional recursiva gera o valor máximo do problema para cada valor das variáveis de estado e choques.

(ii) Aproximação em torno do E.E.

Se há falhas de mercado (por exemplo, competição monopolística ou outras fricções reais ou nominais), ou seja, **não vale o Primeiro Teorema do Bem-Estar**, a alocação é subótima. Usa-se:

- ▶ Metodologia de multiplicadores de Lagrange estocásticos, em que se utilizam as condições de primeira ordem, as restrições e as condições de transversalidade para se obter uma solução;
- ▶ Requer um conjunto de hipóteses mais forte sobre funções-objetivos, restrições e expectativas.
- ▶ Ainda assim, a solução das condições de primeira ordem (Equações de Euler) também é bastante complexa.

Métodos de aproximação em torno do estado estacionário são necessários. Será visto a seguir.

(iii) Aproximação Quadrática Linear

Aproximação quadrática linear aplicada à função objetivo:

- ▶ requer que exista um equilíbrio (nem sempre existe ou é único)
- ▶ a dinâmica local seja bem aproximada por equações em diferenças lineares.

Modelo Macroeconômico

A solução para este sistema de equações estocásticas seria uma sequência de distribuições de probabilidades.

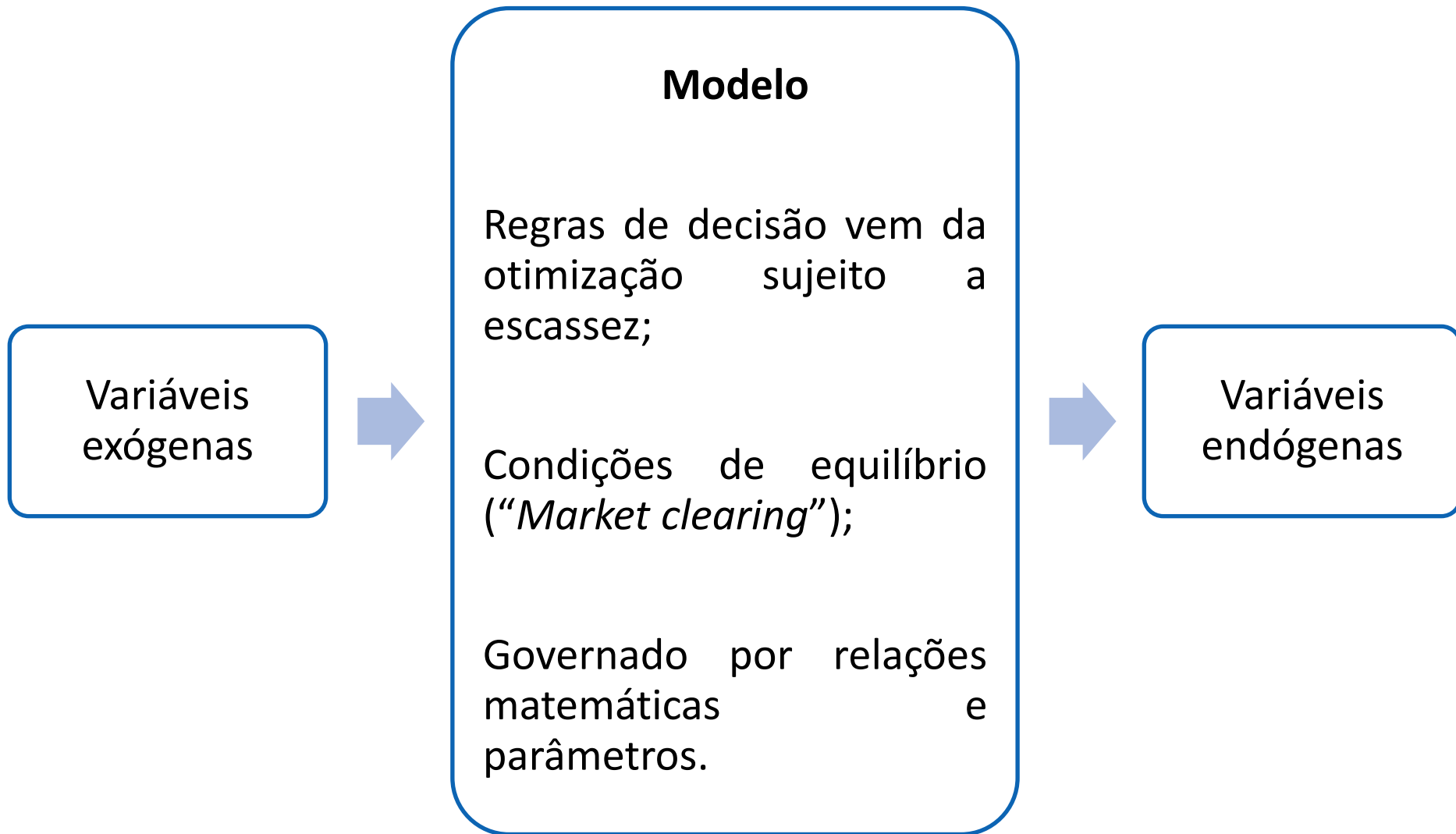
Esse sistema de equações contém um elemento-chave: o valor das variáveis endógenas em determinado período do tempo depende de seus valores futuros esperados.

O uso de modelos teóricos para descrever e entender o comportamento de uma economia é importante por várias razões:

Modelo Macroeconômico

- (i) são importantes para ajudar a compreender as relações complexas entre variáveis econômicas que não podem ser diretamente observadas nos dados; **“os dados só falam através de modelos”**.
- (ii) introduzem uma linguagem ou métrica para se analisar a economia em termos compreensíveis (inteligíveis), e para definir variáveis não observáveis, como a produtividade marginal do capital ($PMgK$), ou variáveis de estado, como Produtividade Total dos Fatores;
- (iii) podem ser usados para realizar simulações, análise de política e experimentos contrafactuais;
- (iv) Fazer previsões só é possível através de um modelo teórico (previsão estrutural).

Modelo Macroeconômico



Modelo faz avaliações e previsões sobre variáveis endógenas

Introdução aos Modelos DSGE

O ambiente dos modelos DSGE é definido por:

- (1) **Dotações:** em cada período os agentes recebem uma unidade de tempo;
- (2) **Informações:** definição do conjunto de informação Ω_t dos agentes no momento da tomada de decisão a respeito de C_t , N_t e K_t : consumo, horas trabalhadas e capital.
- (3) **Preferências:** forma funcional da função utilidade das famílias;
- (4) **Tecnologia:** forma funcional da função de produção das firmas.

Convergência de Modelos



Macroeconomia
Moderna

Abordagem dos Modelos DSGE

A abordagem dos modelos DSGE é a pedra angular da teoria macroeconômica moderna. O desenvolvimento desses modelos se deve, principalmente, para se dar uma resposta a dois desafios: (i) a necessidade de abordar a crítica de Lucas; (ii) o desejo de se elaborar modelos macroeconômicos microfundamentados.

Um dos objetivos da análise macroeconômica é entender como uma economia funciona e realizar experimentos visando estudar os efeitos de uma particular mudança ou distúrbio sobre a economia. Esses distúrbios serão chamados de **choques**.

Na economia, os efeitos de um choque particular serão determinados pelas decisões tomadas pelos agentes econômicos, e como esses agentes reagem aos choques.

Introdução aos Modelos DSGE

Modelos DSGE em larga escala chegaram às instituições políticas que realizam análises e previsões de políticas:

Banco do Canadá (ToTEM)

Banco da Inglaterra (BEQM)

Banco Central Europeu (NAWM)

Banco da Noruega (NEMO)

Banco Sueco de Riscos (RAMSES)

Reserva Federal dos EUA (SIGMA)

FMI (GEM)

Comissão Europeia (QUEST III).

Banco Central do Brasil (SAMBA)

Replicam fatos estilizados observados em dados reais e simular dados sintéticos com um padrão semelhante.

Permitem testar cenários hipotéticos.

Modelos DSGE

Permitem estimar multiplicadores significativos economicamente.

Permitem avaliar e interpretar os possíveis resultados das ações políticas.

Introdução aos Modelos DSGE

Os modelos DSGE servem para estudar e explicar fenômenos econômicos agregados, tais como:

- (1) Os determinantes do crescimento econômico;
- (2) As fontes das flutuações cíclicas dos negócios;
- (3) A propagação de choques;
- (4) Os efeitos de mudanças de políticas econômicas;
- (5) O comportamento do consumo e do investimento;
- (6) A dinâmica da inflação e sua previsão;
- (7) O papel das expectativas e do aprendizado dos agentes.

Panorama sobre Modelos DSGE

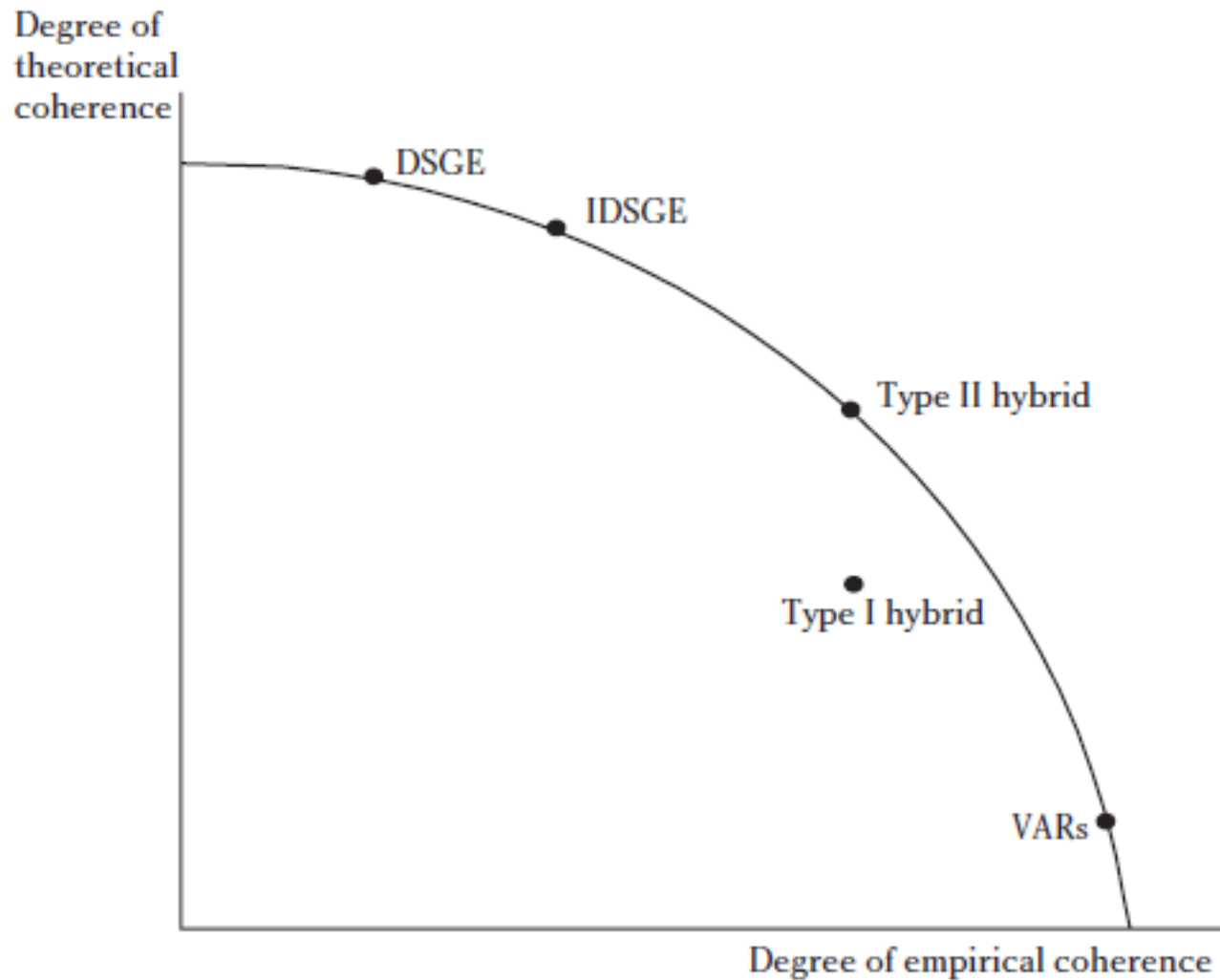
Introdução aos Modelos DSGE

A base da abordagem dos Modelos DSGE é o Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans, e essa abordagem tem sido amplamente adotada como uma das principais ferramentas para a modelagem macroeconômica.

Outra abordagem metodológica em macroeconomia aplicada envolvem modelos vetoriais autorregressivos estruturais (*Structural Vector Autoregression Models - SVAR*).

Os modelos DSGE podem ser pensados como modelos SVAR com muitas variáveis e com algumas de suas identificações guiadas pela teoria econômica.

Trade-off between theoretical and empirical coherence for models



Fonte: Pagan (2003)

Tipologia dos Modelos DSGE

1ª Geração: Modelos de Ciclos Reais de Negócios (*Real Business Cycles* – RBC)

- Firms perfeitamente competitivas;
- Preços perfeitamente flexíveis;
- Fricções reais
- $\Rightarrow$ ciclos causados por choques reais

2ª Geração: Modelos Novo-Keynesianos

- Firms com poder de mercado;
- Rigidez nominal de preços e/ou salários; moeda não-neutra no curto prazo;
- Fricções reais;
- $\Rightarrow$ ciclos causados por choques monetários ou reais;

Próximas Gerações

- Análise dos impactos de mudanças climáticas;
- Análise econômica de processos políticos (*Political Economics*);

Vantagens da Abordagem DSGE

- (i) Fornece muitos resultados consistentes em um contexto microfundamentado, coerente e totalmente dinâmico (melhor compreensão dos mecanismos de transmissão de intervenções políticas e de choques);*
- (ii) Deve ser possível escapar da crítica de Lucas (1976), ao contrário dos modelos macroeconômicos tradicionais, nos quais os parâmetros estimados não são invariantes a mudanças de política ou a mudanças políticas esperadas;*
- (iii) Graças aos desenvolvimentos em técnicas computacionais, a modelagem DSGE é uma técnica bastante flexível;*
- (iv) Lança nova luz sobre as ligações entre política monetária e orçamentária, inflação e ciclo econômico.*

Modelos de Equilíbrio Geral Dinâmico e Estocástico

Modelos

Modelos matemáticos fundamentados em teoria econômica. Visando a análise tanto de choques quanto de políticas, assim como para previsões, é a construção de estruturas formais através de equações que reflitam as interrelações entre as diferentes variáveis macroeconômicas.

Essas estruturas simplificadas são conhecidas por modelos matemáticos, e a questão principal não é se o modelo é uma descrição realista do mundo, mas se esse modelo é apto para explicar a dinâmica observada na economia.

Após um longo período caracterizado por uma profunda separação entre a macroeconomia e a microeconomia, os atuais desenvolvimentos na macroeconomia são baseados sobre considerações microeconômicas das tomadas de decisões dos agentes econômicos.

Modelos de **Equilíbrio Geral** Dinâmico e
Estocástico

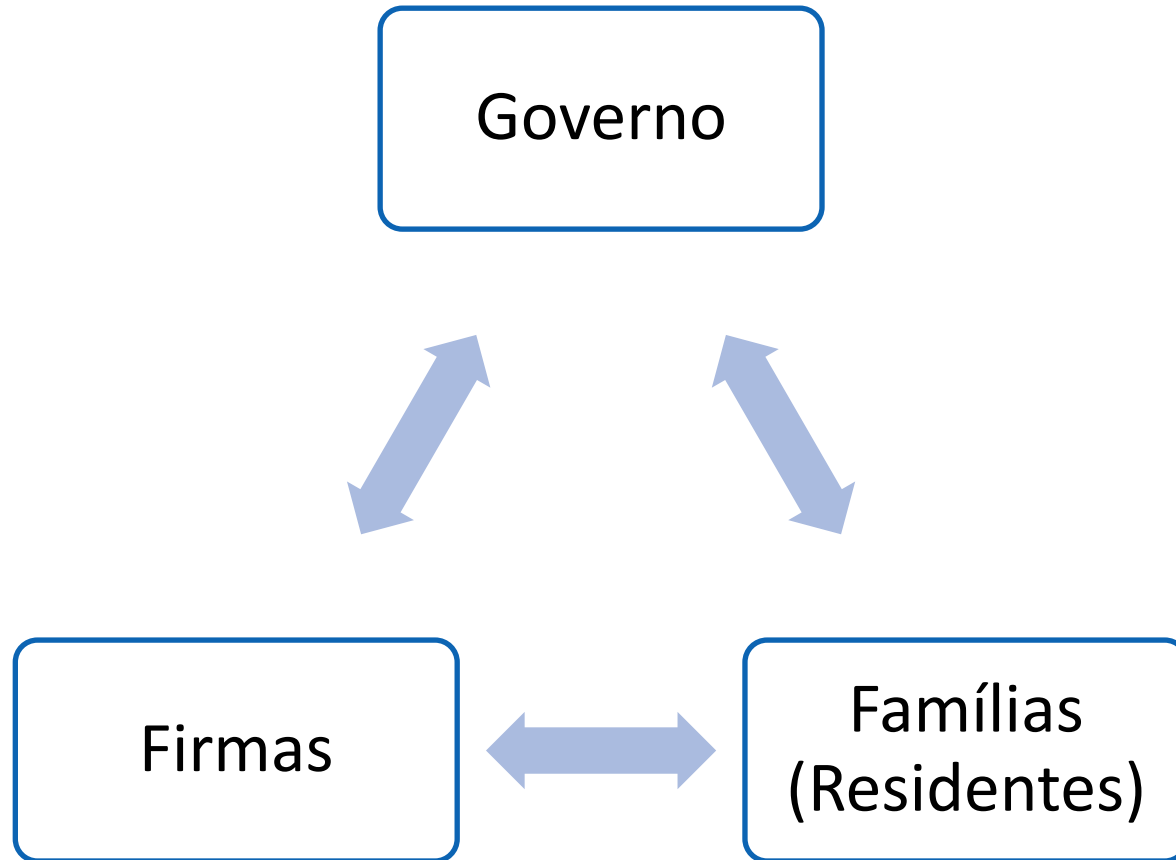
Equilíbrio Geral

Aplica-se a teoria de equilíbrio geral Walrasiano, em que todos os mercados devem estar em equilíbrio. Observa-se toda a economia com muitos mercados interagindo. O equilíbrio geral resulta da combinação das decisões econômicas tomadas por todos os agentes. **Todas as restrições de recursos e usos devem ser consideradas.**

Os resultados dos modelos dependem das decisões tomadas pelos agentes. Ao invés de modelar os mercados, os modelos de equilíbrio geral focam no comportamento dos três principais agentes da economia: **famílias, firmas e governo.** Mas podem incluir agentes adicionais, como um banco central ou um setor externo.

Para que um modelo macroeconômico seja uma réplica válida de uma economia, este modelo deve considerar as múltiplas e complexas relações entre as diferentes variáveis macroeconômicas.

Equilíbrio Geral



Equilíbrio Geral: A alocação de recursos é feita através dos mercados. Existem vários mercados interagindo em um dado momento.

Equilíbrio Geral

As decisões são tomadas por três tipos de agentes:

(1) **Indivíduos (ou famílias)**: decisões relacionadas ao consumo, oferta de trabalho e outros ativos (p. ex., *asset holding*). Sinônimo: Família Representativa, Residência (*household*) Representativa, Agente Representativo, Dinastia, *continuum* de Famílias.

(2) **Firmas (ou empresas)**: determinam a oferta de bens e serviços, a demanda por trabalho, o investimento, a produtividade, o capital financeiro e o uso dos lucros auferidos. Sinônimo: Firma Representativa.

(3) **Governo**: determina os gastos públicos, a tributação e as transferências, base monetária, dívida pública etc. Em resumo, o governo interfere na economia por meio das políticas fiscal e monetária. Sinônimo: Autoridades Fiscal e Monetária.

Equilíbrio Geral

O equilíbrio (curto ou longo prazo) é descrito como geral porque todas as variáveis são consideradas em equilíbrio simultaneamente, não apenas algumas delas, ou um mercado particular, que é uma situação conhecida na microeconomia como equilíbrio parcial.

Assume-se que a economia sempre se encontra no equilíbrio de curto prazo. O longo prazo (ou estado estacionário) é uma propriedade matemática do modelo macroeconômico que descreve sua trajetória quando todos os choques passados tenham funcionado totalmente através do sistema.

O longo prazo é considerado um equilíbrio estático (e não dinâmico) em que todas as variáveis são constantes. Assume-se que o modelo macroeconômico (e não a economia) encontra-se no equilíbrio de longo prazo. **Modelo DSGE sempre no equilíbrio de curto prazo, mas não necessariamente no equilíbrio de longo prazo.**

Modelos de Equilíbrio Geral Dinâmico e Estocástico

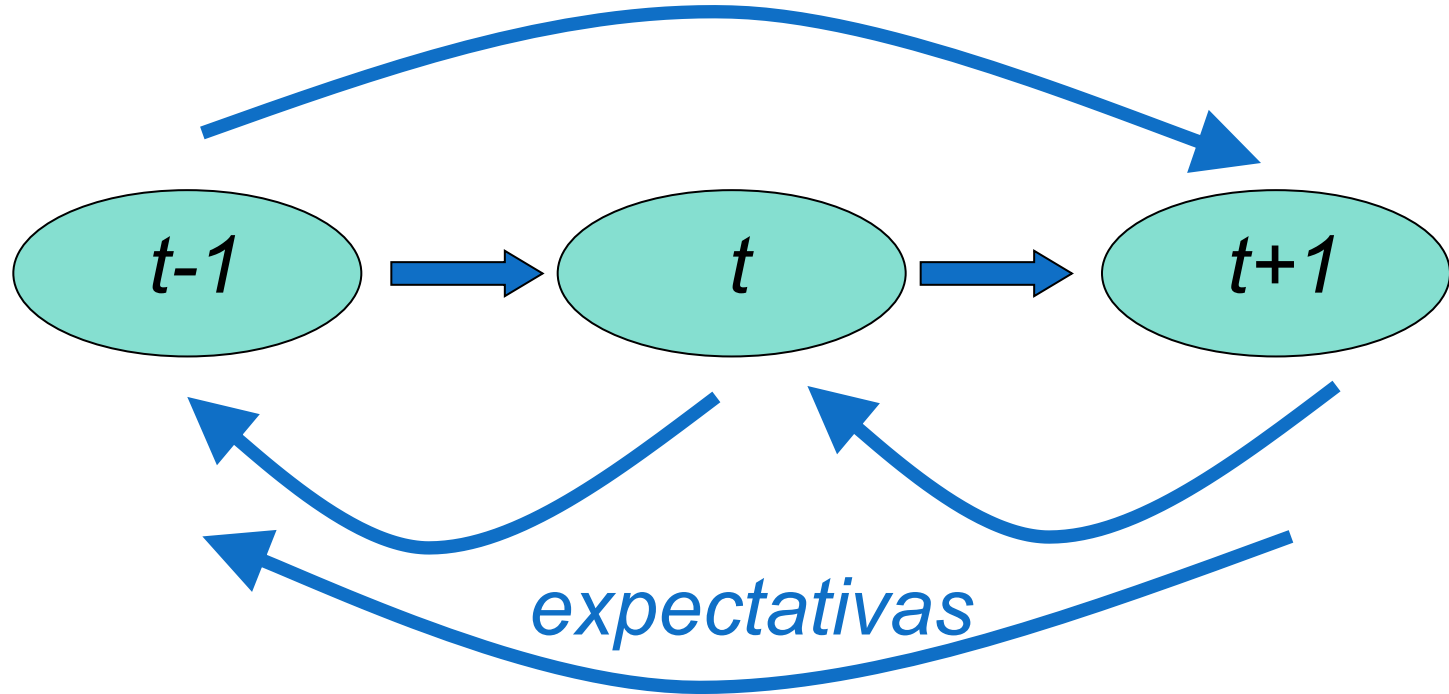
Dinâmico

Estuda-se como a economia evolui ao longo do tempo. Trata-se de um modelo dinâmico no qual o tempo desempenha um papel fundamental.

Foco nas fontes e nos mecanismos de propagação dos ciclos econômicos. Quando um choque ou distúrbio atinge a economia, as variáveis macroeconômicas não retornam ao equilíbrio instantaneamente, mas mudam muito lentamente ao longo do tempo, produzindo reações complexas na economia como um todo.

Decisões intertemporais. Busca explicar a evolução das variáveis de interesse e suas interrelações, ao longo do tempo.

Dinâmico



Dinâmico: O tempo importa. O passado influencia o “hoje”.
O futuro, via expectativas, também influenciará o “hoje”.

Modelos de Equilíbrio Geral Dinâmico e Estocástico

Estocástico

Leva-se em consideração choques estocásticos. Ocorrência de “choques” inesperados: apenas a distribuição de probabilidades dos choques futuros é conhecida.

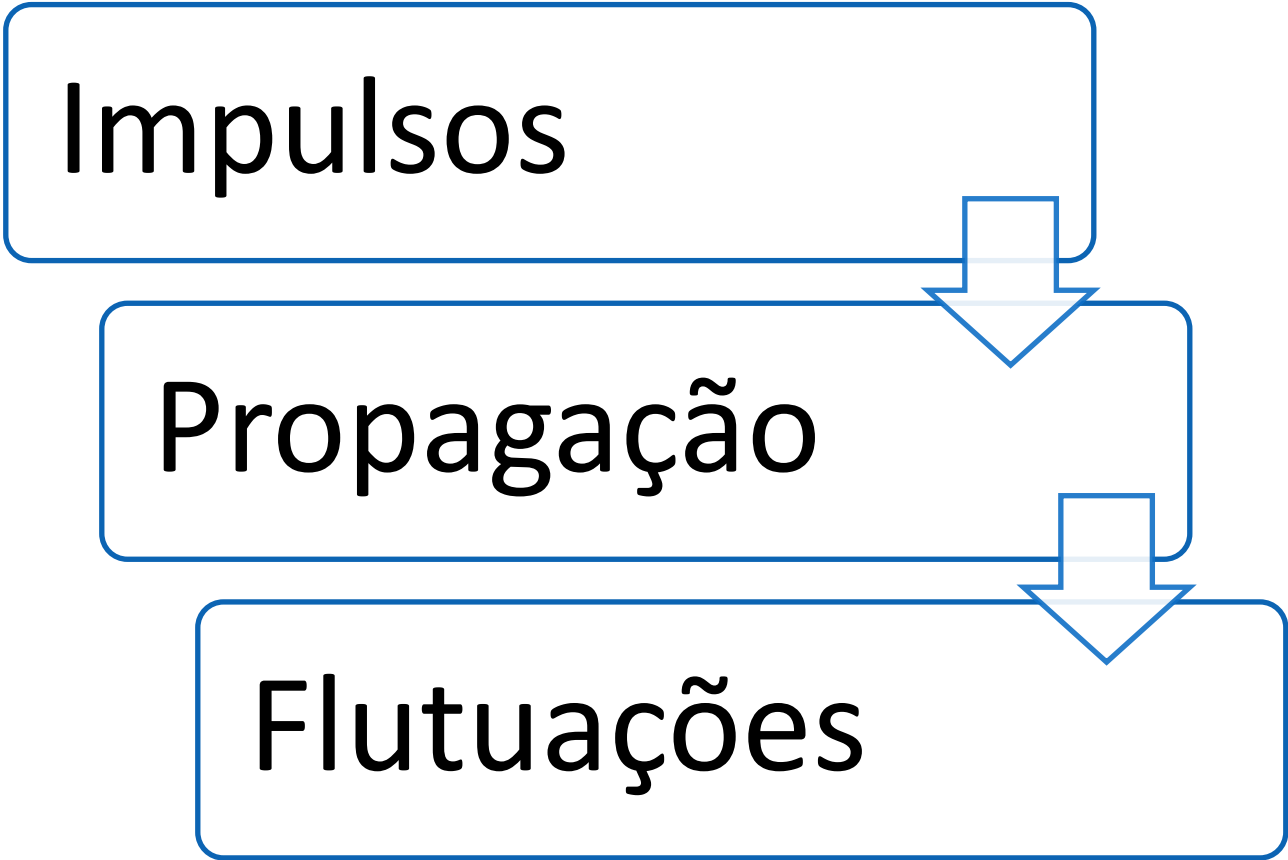
Choques na economia: o foco da macroeconomia moderna baseia-se na resposta dos indivíduos aos choques, e como esses choques afetam os mercados múltiplos simultaneamente, no presente e no futuro.

A **existência de erros** é atribuída a hiatos informacionais, tais como choques não-antecipados na economia.

Decisões dos agentes são ótimas com base no conjunto de informações até t e em suas expectativas em relação ao futuro.

Paradigma Frisch-Slutsky

Impulsos



```
graph TD; A[Impulsos] --> B[Propagação]; B --> C[Flutuações];
```

Propagação

Flutuações

Estocástico: existem choques estruturais responsáveis por ciclos e oscilações nas variáveis macroeconômicas

Determinísticos *versus* Estocásticos

Determinísticos

- Todas as variáveis são pré-definidas (conhecidas) com exatidão. P. ex.: modelos macroeconômicos com previsão perfeita (“*perfect foresight*”) são modelos deterministas
- o equilíbrio intertemporal é uma representação da versão determinística dos modelos estocásticos.

Estocásticos

- As variáveis pré-determinadas/variáveis de escolha (ou seja, todas as variáveis que expressam a estrutura macroeconômica) são expressas como sendo variáveis aleatórias.
- Variáveis aleatórias são variáveis que mudam de valor e que tem associado a essa mudança uma probabilidade de ocorrência.

Classificação das Variáveis

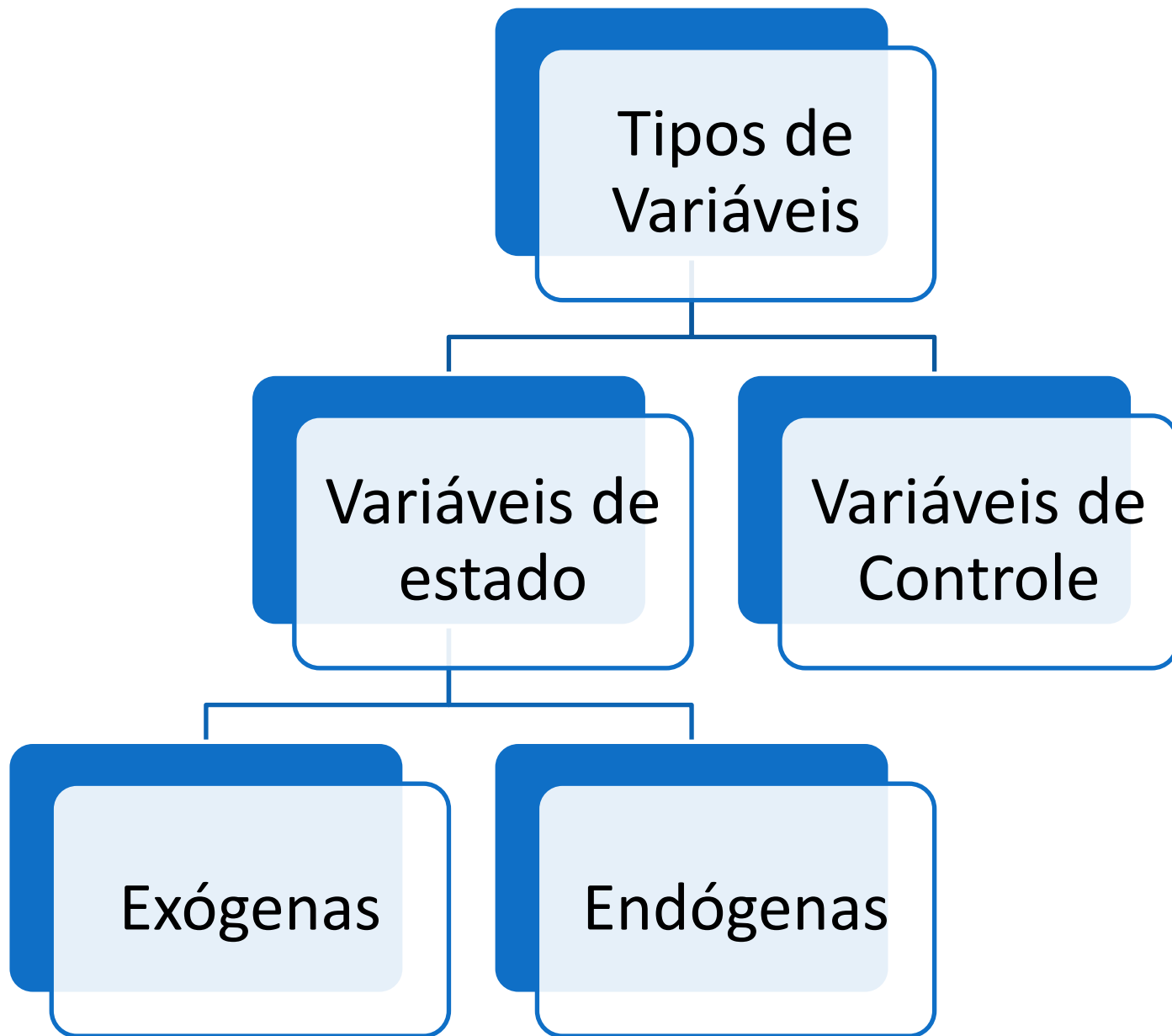
Variáveis denotadas por letras latinas

Variável endógena: denotada/explicada dentro do modelo

- Variável cujo valor é explicado por outras variáveis em um modelo específico; ou seja, variável cujo valor é determinado por meio da solução para o modelo.

Variável exógena: tomada como dada, determinada/explicada fora do modelo.

- Variável que um determinado modelo considera como pré-estabelecida; variável cujo valor independe da solução para o modelo.



Variáveis de estado

Uma variável em que existe a lei do movimento (*law of motion*).

Uma variável cujo nível em qualquer ponto no tempo é dado.

Variáveis de estado exógenas: evoluem no tempo independentemente das escolhas dos tomadores de decisão;

variáveis de estado endógenas: a evolução dessas variáveis é influenciada por suas escolhas.

Variáveis de controle

Representam as escolhas ótimas dos tomadores de decisão, tomando-se como dados os valores das variáveis de estado “herdados” no período t .

Uma variável pela qual não existe a lei do movimento (*law of motion*);

O nível da variável de controle pode ser escolhido em qualquer ponto no tempo (pode tomar saltos discretos).

Parâmetros e notação temporal

Parâmetro

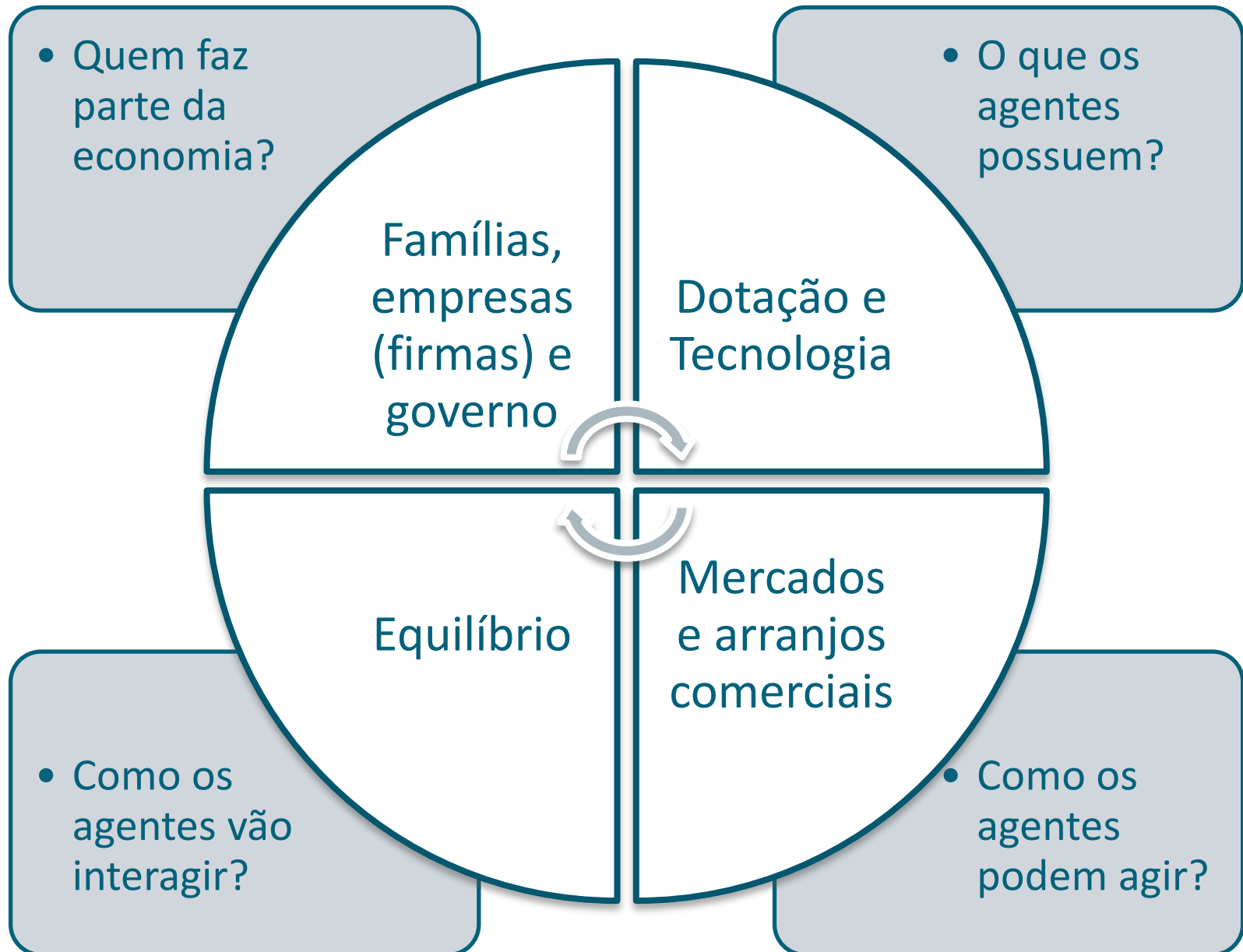
- Valor fixo que governa a relação matemática de um modelo.
- São denominados por letras gregas minúsculas, por exemplo: α e β . Outras vezes, como letras latinas sem o subscrito temporal.

Notação temporal

- O tempo é discreto: t é o presente; $t - 1$ é um período no passado; $t + 1$ é um período no futuro.
- Por exemplo: X_t é o valor da variável X observado na data t .

Especificação de um Modelo DSGE

Modelo DSGE Simples (ATHREYA, 2013)



Características da Macroeconomia Moderna

Os **agentes são racionais**: a economia é vista como estando em equilíbrio contínuo no sentido de que, dada a informação disponível, as pessoas tomam as decisões que parecem ser ótimas para elas, de modo que não cometem erros persistentes (comportamento racional). Prevalece a hipótese das expectativas racionais.

Assume-se que as decisões individuais são baseadas em maximizar a soma descontada do bem-estar esperado, presente e futuro, sujeito às preferências e quatro restrições: (1) restrição de recursos ou orçamentária; (2) dotações; (3) tecnologia disponível; (4) informação.

Natureza intertemporal das decisões: a questão central da macroeconomia DGE é a natureza intertemporal das decisões: se consumir hoje, ou poupar hoje a fim de consumir no futuro. Analisa-se transferir a renda hoje para o consumo futuro, ou a renda futura para o consumo hoje

Agentes Representativos (COSTA, 2015)

Famílias (ou Família Representativa)

- Existe um grande número de famílias tratadas como idênticas, daí o conceito de “família representativa”.
- Oferecem trabalho;
- Detêm o capital;
- Possuem as empresas;
- Compram bens e serviços;

Empresas (ou Firma Representativa)

- Existe um grande número de firmas que possuem a mesma tecnologia, daí o conceito de “firma representativa”.
- Produzem algum produto que pode ser consumido ou investido por meio de títulos/investimentos e oferta de trabalho;
- Recrutam trabalhadores: as empresas contratam trabalho fornecido pelas famílias;
- Utilizam o estoque de capital;
- Vendem os bens e serviços;

Todos os modelos DSGE tem em comum:

Regras de decisão dos agentes derivadas das hipóteses sobre preferências e tecnologias a partir da solução de problemas de otimização intertemporal;

Agentes enfrentam incertezas sobre a produtividade total dos fatores ou a taxa de juros, por exemplo, gerada por:

- (1) Processos estocásticos exógenos; ou
- (2) Choques tecnológicos; ou
- (3) Desvios não antecipados da regra de política monetária.

Introdução

Otimização Dinâmica com Lagrangeanos

Log-linearização

Otimização dinâmica com Lagrangeanos

Podemos utilizar métodos usados em problemas estáticos para obter as condições de primeira ordem (CPO). Considere esse exemplo simples:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\max}_{\{C_t, N_t, B_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\ln C_t - \frac{N_t^{1-\eta}}{1-\eta} \right) \\ & \text{s. a.} \quad C_t + B_t = \frac{R_{t-1} B_{t-1}}{\pi_t} + W_t N_t \end{aligned}$$

Otimização dinâmica com Lagrangeanos

Em que:

C_t é o consumo

N_t é a oferta de trabalho

B_t são os títulos/investimentos

W_t são os salários

R_t é a taxa de juros

π_t é a taxa de inflação

β é preferência temporal (fator de desconto)

η é o parâmetro de preferências no trabalho

Otimização dinâmica com Lagrangeanos

Condições iniciais: pode-se usar outro tipo de notação, por exemplo, H_t (horas trabalhadas) no lugar de N_t .

A condição orçamentária e o prazo dos títulos podem ser diferentes.

Função Lagrangeana de valor corrente:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \left(\ln C_t - \frac{N_t^{1-\eta}}{1-\eta} \right) - \lambda_t \left(C_t + B_t - \frac{R_{t-1}B_{t-1}}{\pi_t} - W_t N_t \right) \right\}$$

Otimização dinâmica com Lagrangeanos

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \left(\ln C_t - \frac{N_t^{1-\eta}}{1-\eta} \right) - \lambda_t \left(C_t + B_t - \frac{R_{t-1}B_{t-1}}{\pi_t} - W_t N_t \right) \right\}$$

Condições de primeira ordem em relação a C_t , N_t , B_t e λ_t .

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \frac{1}{C_t} - \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = (1 - \eta) \frac{N_t^{1-\eta-1}}{1 - \eta} + \lambda_t N_t = 0 \Rightarrow N_t^{-\eta} + \lambda_t N_t = 0$$

Otimização dinâmica com Lagrangeanos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t} = -\lambda_t + \beta \lambda_{t+1} \left(\frac{R_t}{\pi_{t+1}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = C_t + B_t - \frac{R_{t-1}B_{t-1}}{\pi_t} - W_t N_t = 0$$

$$\Rightarrow C_t + B_t = \frac{R_{t-1}B_{t-1}}{\pi_t} + W_t N_t$$

Ou seja, recupera-se a restrição orçamentária.

Otimização dinâmica com Lagrangeanos

Iremos, agora, acrescentar incerteza na modelagem. Em Modelos DSGE, a **incerteza** assume a forma de expectativas (isto é, valor esperado, esperança matemática):

$$\begin{aligned} \max_{\{C_t, N_t, B_t\}} \quad & E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\ln C_t - \frac{N_t^{1-\eta}}{1-\eta} \right) \\ \text{s. a.} \quad & C_t + B_t = \frac{R_{t-1} B_{t-1}}{\pi_t} + W_t N_t \end{aligned}$$

Função Lagrangeana valor corrente:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \left(\ln C_t - \frac{N_t^{1-\eta}}{1-\eta} \right) - \lambda_t \left(C_t + B_t - \frac{R_{t-1} B_{t-1}}{\pi_t} - W_t N_t \right) \right\}$$

Otimização dinâmica com Lagrangeanos

Função Lagrangeana valor corrente:

$$\mathcal{L} = E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \left(\ln C_t - \frac{N_t^{1-\eta}}{1-\eta} \right) - \lambda_t \left(C_t + B_t - \frac{R_{t-1}B_{t-1}}{\pi_t} - W_t N_t \right) \right\}$$

Por que expectativas?

Teoria das Expectativas Racionais: indivíduos ou agentes econômicos agem racionalmente para maximizar seus interesses próprios.

Teoria da Equivalência Ricardiana: Barro (1974) argumentou que cortes de impostos agora teriam pouco efeito, já que indivíduos racionais perceberiam que esses cortes teriam de ser pagos no futuro por meio de impostos mais altos e, portanto, não ajustariam seus padrões de gastos atuais.

Otimização dinâmica com Lagrangeanos

Condições de primeira ordem em relação a C_t , N_t , B_t e λ_t .

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \frac{1}{C_t} - \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = (1 - \eta) \frac{N_t^{1-\eta-1}}{1 - \eta} + \lambda_t N_t = 0 \Rightarrow N_t^{-\eta} + \lambda_t N_t = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t} = -\lambda_t + \beta E_t \left[\lambda_{t+1} \left(\frac{R_t}{\pi_{t+1}} \right) \right] = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = C_t + B_t - \frac{R_{t-1} B_{t-1}}{\pi_t} - W_t N_t = 0$$

$$\Rightarrow C_t + B_t = \frac{R_{t-1} B_{t-1}}{\pi_t} + W_t N_t$$

Otimização dinâmica com Lagrangeanos

Um exemplo ligeiramente diferente:

$$\begin{aligned} & \max_{\{C_t, N_t, B_t\}} \quad E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{N_t^{1-\eta}}{1-\eta} \right) \\ & \text{s. a.} \quad C_t + B_t = \frac{R_{t-1} B_{t-1}}{\pi_t} + W_t N_t \end{aligned}$$

Otimização dinâmica com Lagrangeanos

Função Lagrangeana valor corrente:

$$\mathcal{L} = E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \left(\frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{N_t^{1-\eta}}{1-\eta} \right) - \lambda_t \left(C_t + B_t - \frac{R_{t-1}B_{t-1}}{\pi_t} - W_t N_t \right) \right\}$$

Introdução

Otimização Dinâmica com Lagrangeanos

Log-linearização

Log-Linearização

Os modelos DSGE são não-lineares, de modo que há dificuldades na obtenção de soluções e estimação de parâmetros.

Deve-se, portanto, trabalhar com aproximações ao modelo não-linear.

Se por um lado algumas características dos modelos DSGE se perdem nessas aproximações, por outro lado esses modelos se tornam mais gerenciáveis.

Expansões de séries de Taylor

Toma-se as aproximações de primeira ordem de uma função f como sendo: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Essa é a aproximação de primeira ordem da função f em x ao redor do ponto x_0 . Quanto mais perto estivermos de x_0 , melhor será a aproximação.

Isso pode ser generalizado no caso multivariado:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Expansões de séries de Taylor

Agora pense nisso em termos de modelos DSGE! Sobre qual ponto x_0 devemos fazer a aproximação?

Resposta: estado estacionário da economia! A economia irá convergir para um estado estacionário na ausência de choques futuros.

Uma vez que a economia flutua não muito longe do estado estacionário, este é um ponto natural para fazer uma aproximação.

Expansões de séries de Taylor

Exemplo nº 1: Por exemplo, considere a demanda agregada de uma economia seja expressa por $Y_t = C_t + B_t$, e que não exista crescimento nessa economia.

O estado estacionário será dado por: $\bar{Y} = \bar{C} + \bar{B}$

Lembre-se: no estado estacionário, os subscritos de tempo são irrelevantes.

Expansões de séries de Taylor

Note que:

$$\ln x_t - \ln x_{t-1} = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} = \% \Delta x_t = \tilde{x}_t$$

Aproximação de série de Taylor:

$$f(x_t) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x_t - x_0)$$

$$f(x_t) \approx f(x_0) + f'(x_0) \frac{(x_t - x_0)x_0}{x_0}$$

Expansões de séries de Taylor

$$f(x_t) - f(x_0) \approx f'(x_0) \underbrace{(\ln x_t - \ln x_0)}_{\tilde{x}_t} x_0$$

$$\frac{(f(x_t) - f(x_0)) \color{red}{f(x_0)}}{\color{red}{f(x_0)}} \approx f'(x_0)(\tilde{x}_t)x_0$$

$$(\ln f(x_t) - \ln f(x_0))f(x_0) \approx f'(x_0)(\tilde{x}_t)x_0$$

$$\underbrace{(\ln f(x_t) - \ln f(x_0))}_{f(\tilde{x}_t)} f(x_0) \approx f'(x_0)(\tilde{x}_t)x_0$$

$$f(\tilde{x}_t) \approx f'(x_0)(\tilde{x}_t) \frac{x_0}{f(x_0)}$$

Expansões de séries de Taylor

Note que, aqui, x_0 significa o estado estacionário. E, portanto, $\tilde{x}_t$ pode ser interpretado como sendo o desvio percentual de x_t do estado estacionário.

Existem várias maneiras diferentes de se fazer log-linearização.

A expansão da série de Taylor é uma boa opção na maioria dos casos.

Log-Linearização

Exemplo nº 2: as variáveis em $\sim$ representam desvio em log do estado estacionário:

$$\tilde{y}_t \bar{Y} = \tilde{c}_t \bar{C} + \tilde{b}_t \bar{B}$$

$$\tilde{y}_t = \tilde{c}_t \frac{\bar{C}}{\bar{Y}} + \tilde{b}_t \frac{\bar{B}}{\bar{Y}}$$

Log-Linearização

Exemplo nº 3: função de produção simples:

$$y_t = A_t N_t$$

Onde y_t é o produto, A_t é a tecnologia e N_t é o trabalho.

O estado estacionário seria: $\bar{y} = \bar{A}\bar{N}$

Desvios em log do estado estacionário:

Log-Linearização

$$y_t - \bar{y} = \bar{N}(A_t - \bar{A}) + \bar{A}(N_t - \bar{N})$$

$$\frac{(y_t - \bar{y})\bar{y}}{\bar{y}} = \frac{\bar{N}(A_t - \bar{A})\bar{A}}{\bar{A}} + \frac{\bar{A}(N_t - \bar{N})\bar{N}}{\bar{N}}$$

$$\frac{(y_t - \bar{y})}{\bar{y}} \bar{y} = \frac{(A_t - \bar{A})}{\bar{A}} \bar{A}\bar{N} + \frac{(N_t - \bar{N})}{\bar{N}} \bar{A}\bar{N}$$

$$\tilde{y}_t \bar{y} = \tilde{a}_t \bar{A}\bar{N} + \tilde{n}_t \bar{A}\bar{N}$$

$$\tilde{y}_t \bar{y} = (\tilde{a}_t + \tilde{n}_t) \bar{A}\bar{N}$$

$$\tilde{y}_t = \tilde{a}_t + \tilde{n}_t$$

Nota: assume-se que $\ln A_t$ é um processo estacionário.

Log-Linearização

Exemplo nº 4: Função de Produção Cobb-Douglas:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha}$$

Em que: Y_t é o produto; A_t é a tecnologia; K_t é o capital; N_t é o trabalho; α é a preferência.

Estado estacionário:

$$\bar{Y} = \bar{A} \bar{K}^\alpha \bar{N}^{1-\alpha}$$

Log-Linearização

Tomando-se os desvios em log do estado estacionário, tem-se:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(y_t - \bar{y})}{\bar{y}} \right] \bar{Y} \\ &= \left[\frac{(A_t - \bar{A})}{\bar{A}} \right] \bar{A} \bar{K}^\alpha \bar{N}^{1-\alpha} + \alpha \left[\frac{(K_t - \bar{K})}{\bar{K}} \right] \bar{A} \bar{K}^{\alpha-1} \bar{N}^{1-\alpha} \bar{K} \\ &+ (1 - \alpha) \left[\frac{(N_t - \bar{N})}{\bar{N}} \right] \bar{A} \bar{K}^\alpha \bar{N}^{1-\alpha-1} \bar{N} \end{aligned}$$

Log-Linearização

$$\begin{aligned} \tilde{y}_t \bar{Y} &= \tilde{a}_t \bar{A} \bar{K}^\alpha \bar{N}^{1-\alpha} + \alpha \tilde{k}_t \bar{A} \underbrace{\frac{\bar{K}^\alpha}{\bar{K}}}_{\bar{K}} \bar{N}^{1-\alpha} \overset{corta}{\hat{\bar{K}}} \\ &+ (1 - \alpha) \tilde{n}_t \bar{A} \bar{K}^\alpha \bar{N}^{-\alpha} \bar{N}^{corta} \end{aligned}$$

$$\tilde{y}_t \bar{Y} = \tilde{a}_t \bar{A} \bar{K}^\alpha \bar{N}^{1-\alpha} + \alpha \tilde{k}_t \bar{A} \bar{K}^\alpha \bar{N}^{1-\alpha} + (1 - \alpha) \tilde{n}_t \bar{A} \bar{K}^\alpha \bar{N}^{1-\alpha}$$

$$\underbrace{\tilde{y}_t \bar{Y}}_{corta} = (\tilde{a}_t + \alpha \tilde{k}_t + (1 - \alpha) \tilde{n}_t) \underbrace{\bar{A} \bar{K}^\alpha \bar{N}^{1-\alpha}}_{corta}$$

$$\tilde{y}_t = \tilde{a}_t + \alpha \tilde{k}_t + (1 - \alpha) \tilde{n}_t$$

Log-Linearização

Exemplo nº 5: condições de primeira ordem para a função Lagrangeana do consumo (ver slide 36).

Função Lagrangeana valor corrente:

$$\mathcal{L} = E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \left(\frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{N_t^{1-\eta}}{1-\eta} \right) - \lambda_t \left(C_t + B_t - \frac{R_{t-1}B_{t-1}}{\pi_t} - W_t N_t \right) \right\}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = (1-\gamma) \frac{C_t^{1-\gamma-1}}{1-\gamma} - \lambda_t = 0 \Rightarrow C_t^{-\gamma} = \lambda_t$$

Em que λ_t é o multiplicador de Lagrange.

Log-Linearização

$$-\gamma \bar{C}^{-\gamma-1} (C_t - \bar{C}) = (\lambda_t - \bar{\lambda})$$

$$\frac{-\gamma \bar{C}^{-\gamma-1} (C_t - \bar{C}) \bar{C}}{\bar{C}} = \frac{(\lambda_t - \bar{\lambda}) \bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}$$

$$\frac{\frac{-\gamma \bar{C}^{-\gamma}}{\bar{C}} (C_t - \bar{C}) \bar{C}}{\bar{C}} = \frac{(\lambda_t - \bar{\lambda}) \bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}$$

$$\frac{-\gamma \bar{C}^{-\gamma} (C_t - \bar{C})}{\bar{C}} = \frac{(\lambda_t - \bar{\lambda}) \bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}$$

Log-Linearização

$$-\gamma \bar{C}^{-\gamma} \underbrace{\frac{(C_t - \bar{C})}{\bar{C}}}_{\tilde{c}_t} = \bar{\lambda} \underbrace{\frac{(\lambda_t - \bar{\lambda})}{\bar{\lambda}}}_{\tilde{\lambda}_t}$$

$$-\gamma \bar{C}^{-\gamma} \tilde{c}_t = \bar{\lambda} \tilde{\lambda}_t$$

No estado estacionário, teremos: $\bar{C}^{-\gamma} = \bar{\lambda}$

Portanto, podemos simplificar para: $-\gamma \tilde{c}_t = \tilde{\lambda}_t$

Log-linearização

Suponha que tenhamos uma variável x_t que pode ter um estado estacionário de zero.

Não podemos log-linearizar em torno dele, pois logaritmo de zero é infinito.

Solução: defina uma nova variável: $y_t = 1 + x_t$

Teremos um estado estacionário de 1

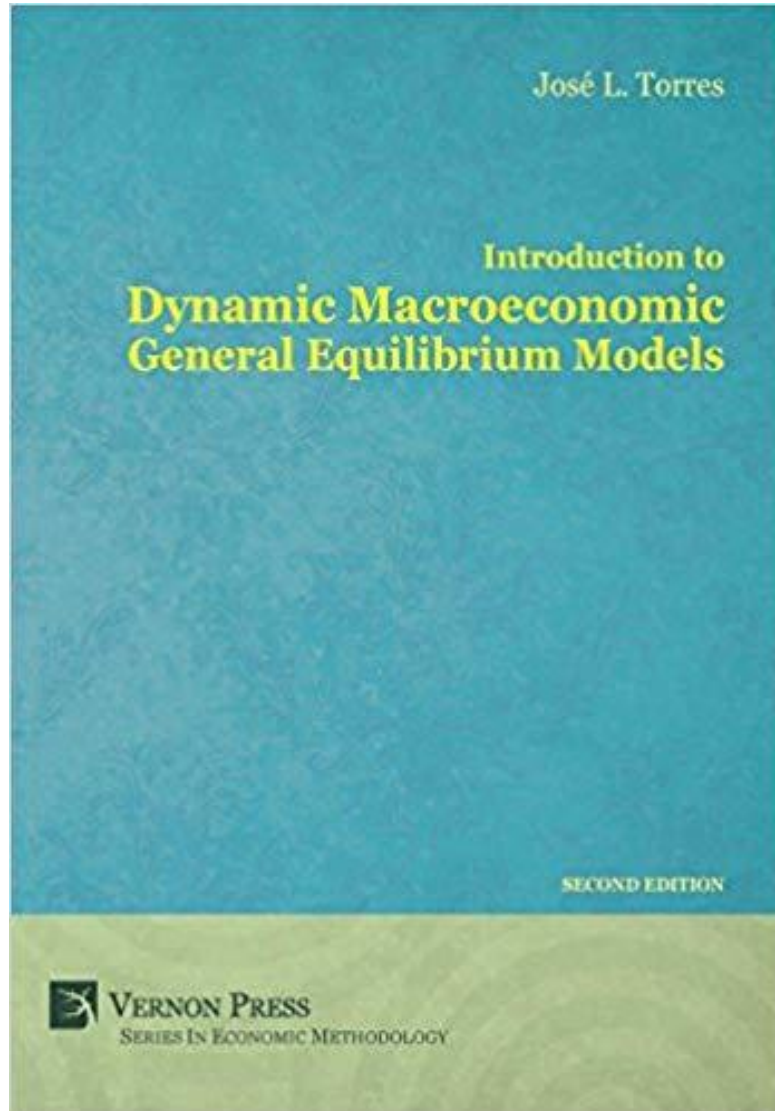
Log-linearização

Solução alternativa: linearizar a variável (mas você também teria que linearizar o resto do modelo).

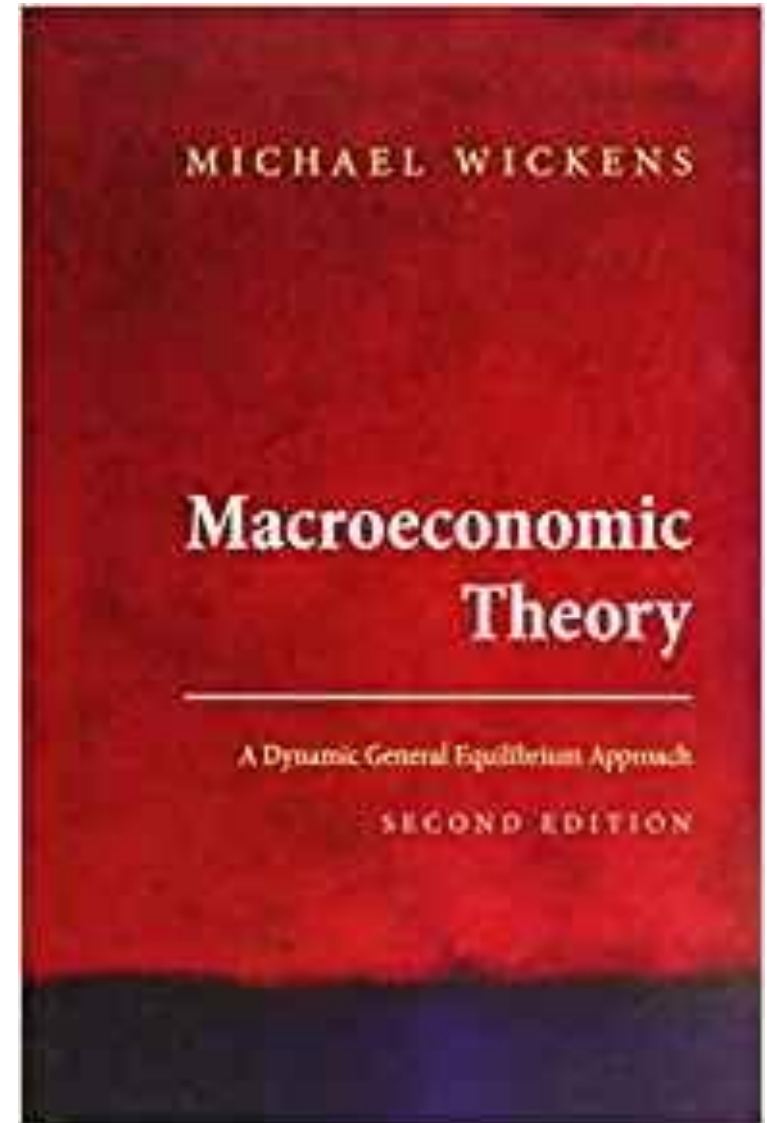
Você pode misturar linearizar e log-linearizar, mas você deve ser consistente.

Nota: quando você log-lineariza a equação, os termos constantes irão desaparecer.

Referência bibliográfica



Capítulo 1



Capítulo 1

Referências bibliográficas

ARROW, Kenneth J.; DEBREU, Gérard. Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, Chicago, v. 22, n. 3, p. 265-290, 1954.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2014.

BOX, George E. P.; DRAPER, Norman R. **Empirical model-building and response surfaces**. New York: Wiley, 1987.

BUNGE, Mario. **Teoria e realidade**. São Paulo: Perspectiva, 1974.

BUNGE, Mario. **Scientific research I: the search for system**. Berlin: Springer-Verlag, 1967.

Referências bibliográficas

CHIANG, Alpha C.; WAINWRIGHT, Kevin. *Métodos fundamentais da economia matemática*. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

COSTA FILHO. J. R. **Introdução aos Modelos DSGE**. Curso de Capacitação. Brasília, 2024.

CAVALCANTI, M. A. F. H. **Curso: Modelos DSGE – Teoria e Aplicações**. Brasília, IPEA, 2011.

DEBREU, Gérard. *Theory of value: an axiomatic analysis of economic equilibrium*. New Haven: Yale University Press, 1959.

EDWARDS, David; HAMSON, Michael. **Guide to mathematical modelling**. Boca Raton: CRC Press, 2001.

Referências bibliográficas

HAUSMAN, Daniel M. *The inexact and separate science of economics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. **Introdução à pesquisa operacional**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

JEHLE, Geoffrey A.; RENY, Philip J. *Advanced microeconomic theory*. 3. ed. Harlow: Pearson Education, 2011.

MÄKI, Uskali. Models are experiments, experiments are models. *Journal of Economic Methodology*, London, v. 12, n. 2, p. 303-315, 2005.

Referências bibliográficas

MAS-COLELL, Andreu; WHINSTON, Michael D.; GREEN, Jerry R. *Microeconomic theory*. New York: Oxford University Press, 1995.

MEYER, Walter J. **Concepts of mathematical modeling**. Mineola: Dover Publications, 2004.

RODRIK, Dani. *Economics rules: the rights and wrongs of the dismal science*. New York: W. W. Norton, 2015.

ROMER, David. *Advanced macroeconomics*. 5. ed. New York: McGraw-Hill Education, 2019.

Referências bibliográficas

SIMON, Carl P.; BLUME, Lawrence. **Matemática para economistas**. Porto Alegre: Bookman, 2004.

STOKEY, Nancy L.; LUCAS JR., Robert E.; PRESCOTT, Edward C. *Recursive methods in economic dynamics*. Cambridge: Harvard University Press, 1989.

SWETZ, Frank; HARTZLER, James. **Mathematical modeling in the secondary school curriculum**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1991.

Referências bibliográficas

SUPPES, Patrick. **Studies in the methodology and foundations of science: selected papers from 1951 to 1969**. Dordrecht: Reidel, 1969.

VAN FRAASSEN, Bas C. **The scientific image**. Oxford: Oxford University Press, 1980.

WEISBERG, Michael. **Simulation and similarity: using models to understand the world**. Oxford: Oxford University Press, 2013.

Obrigado!

Contato:

PROF. DR. SÉRGIO RICARDO DE BRITO GADELHA

E-mail: sergio.gadelha@idp.edu.br e professor.sergio.Gadelha@gmail.com

Sítio eletrônico: <https://sergiorbgadelha.com.br/>

Apêndice A – Definição Geral de Modelo Econômico

Definição Formal de Modelo em Economia Matemática

► Um **modelo econômico** de S é uma estrutura formal:

$$M = (X, \Theta, \mathcal{F}, \mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{R}, \mathcal{E})$$

tal que:

- X é o espaço das variáveis de estado (endógenas e exógenas);
- $\mathcal{A}$ é o conjunto de agentes econômicos;
- Θ é o conjunto dos parâmetros estruturais;
- $\mathcal{F}$ é o conjunto das relações matemáticas que vinculam as variáveis e parâmetros (regras de comportamento e interações);
- $\mathcal{H}$ é o conjunto de hipóteses ou axiomas que definem o domínio de validade do modelo;
- $\mathcal{R}$ é o conjunto de restrições (tecnológicas, orçamentárias e institucionais) e relações estruturais;
- $\mathcal{E}$ representa o ambiente econômico, conceito de equilíbrio ou a lei de evolução dinâmica do sistema;

Existe uma aplicação $\phi: S \rightarrow M$

que associa elementos relevantes do sistema real aos objetos formais do modelo.

Modelo Econômico como Sistema de Otimização

► Na maior parte da teoria microeconômica moderna, os agentes são representados como solucionadores de problemas de otimização. Os agentes resolvem problemas de otimização sujeitos a restrições. Por exemplo, no problema do consumidor:

$$\max_x U(x)$$

sujeito a:

$$p \cdot x \leq w$$

O modelo é constituído conjuntamente por:

- Função utilidade: $U(x)$;
- restrição orçamentária;
- regras de escolha;
- conceito de equilíbrio.
- x é o vetor de bens consumidos;
- p é o vetor de preços
- p é o vetor de preços

Portanto, não é apenas a solução ótima. O modelo engloba toda a estrutura lógica que gera essa solução.

Modelo Econômico como Sistema de Equilíbrio

► Segundo Debreu, Arrow e McKenzie, um modelo econômico pode ser entendido como uma coleção de agentes cujas escolhas individuais devem ser compatíveis entre si.

Formalmente, um equilíbrio é um vetor:

$$(p^*, x^*)$$

tal que:

- cada agente otimiza seu objetivo;
- todas as restrições são satisfeitas;
- os mercados se equilibram.

Matematicamente:

$$\sum_{i=1}^n x_i^d = \sum_{i=1}^n x_i^s .$$

O modelo econômico é, portanto, a estrutura completa que gera esse equilíbrio.

Modelo Econômico Dinâmico

► Quando o tempo é incorporado explicitamente, o modelo torna-se um sistema dinâmico.

Uma formulação geral pode ser dada por

$$x_{t+1} = G(x_t, \theta)$$

ou

$$\dot{x}(t) = G(x, (t)\theta)$$

Nessa classe se enquadram:

- modelos de crescimento econômico;
- modelos de gerações sobrepostas;
- modelos de ciclos reais de negócios (RBC);
- modelos DSGE;
- modelos de programação dinâmica.

Por exemplo, no modelo de Solow: $\dot{K} = sF(K, L) - \delta K$, a dinâmica da economia é descrita pela trajetória da variável de estado K ao longo do tempo.

Definição Axiomática

Sob uma perspectiva mais rigorosa, inspirada na teoria dos modelos e na economia matemática moderna, um modelo econômico pode ser entendido como uma estrutura formal que satisfaz um conjunto de hipóteses ou axiomas econômicos.

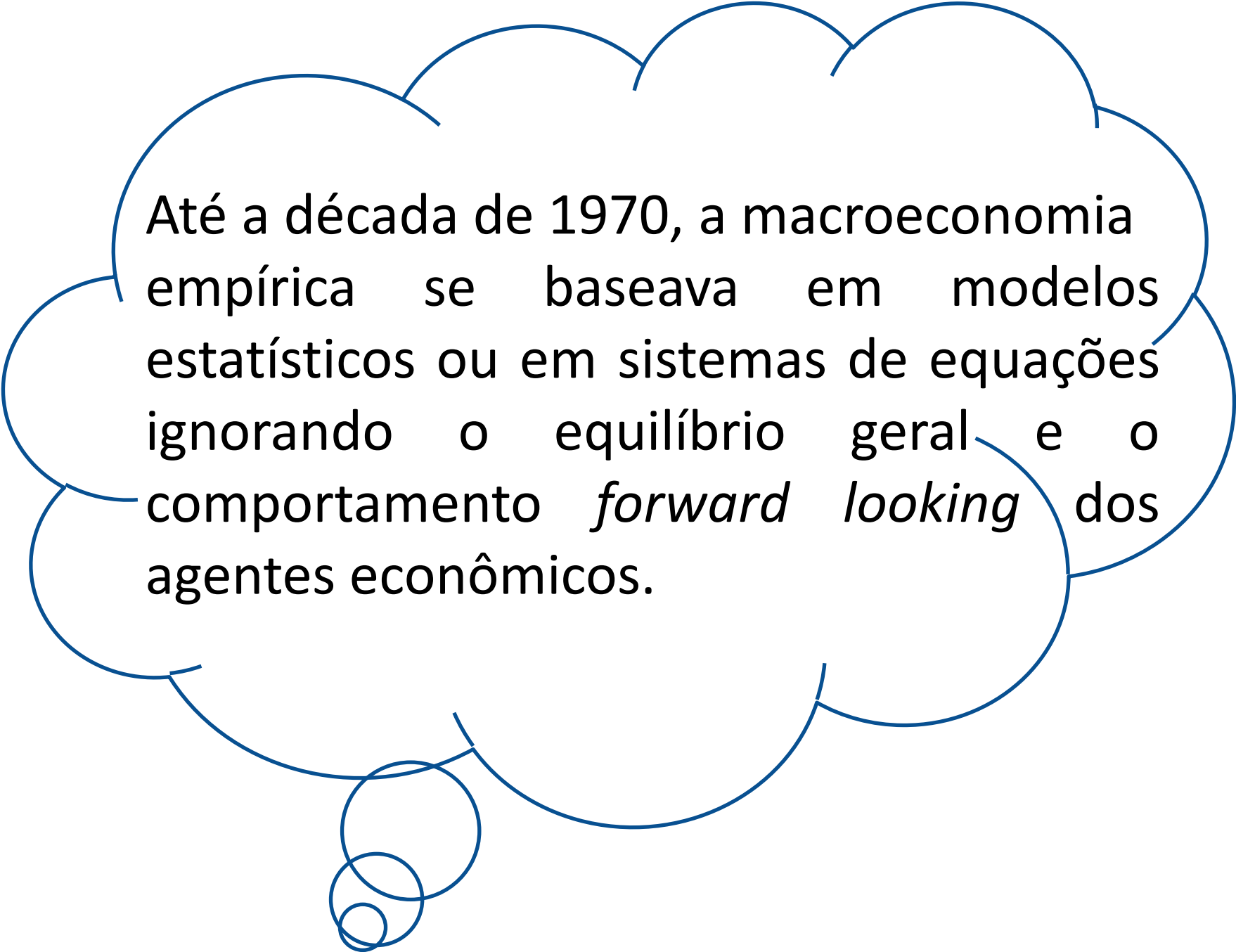
Seja $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ um conjunto de pressupostos econômicos. Uma estrutura $\mathcal{M} = (D, F, R)$ é um modelo econômico se todas as proposições de $\mathcal{A}$ forem satisfeitas nessa estrutura.

Por exemplo, em um modelo de concorrência perfeita, os axiomas podem incluir:

- racionalidade dos consumidores;
- maximização de lucro pelas firmas;
- mercados competitivos;
- ausência de poder de mercado;
- livre entrada e saída.

O modelo econômico é a estrutura matemática que incorpora esses pressupostos e permite deduzir resultados sobre preços, quantidades e bem-estar.

Apêndice B - Perspectiva histórica sobre Modelos DSGE



Até a década de 1970, a macroeconomia empírica se baseava em modelos estatísticos ou em sistemas de equações ignorando o equilíbrio geral e o comportamento *forward looking* dos agentes econômicos.

Crítica de Lucas

Além de concordar com Friedman e Phelps, Lucas criticou também a metodologia econométrica keynesiana que usava modelos estimados para avaliar efeitos de diferentes políticas.

Como Keynes, Lucas dizia que os parâmetros de um modelo macroeconômico não são invariáveis a mudanças de políticas. Esta é a famosa **Crítica de Lucas!**

Lucas vai além, e argumenta que alterações de políticas modificam as reações das famílias e das firmas, isto é, altera-se as expectativas dos agentes econômicos.

Crítica de Lucas

Altera-se, portanto, o valor dos parâmetros das equações agregadas. Por exemplo, função consumo, balança comercial etc.

O ponto central dessa crítica é que os parâmetros estimados por meio de um modelo macroeconômico dependem da política econômica vigente na época em que o modelo é estimado, e mudarão se essa política for alterada.

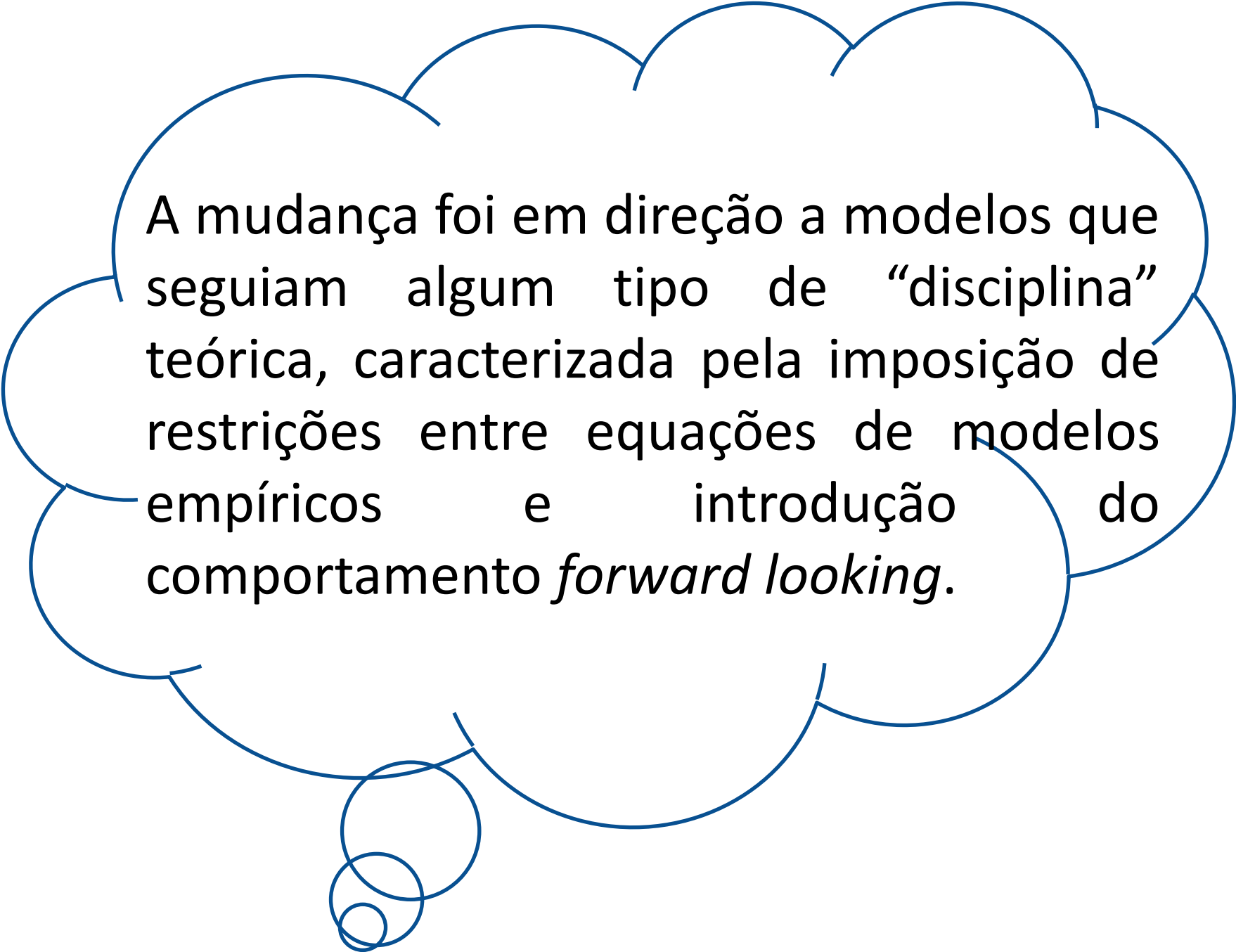
Ou seja, os parâmetros estimados não são invariáveis quando ocorrem mudanças na política econômica porque quando as políticas mudam muito, os coeficientes dos modelos se tornam instáveis.

Crítica de Lucas

Lucas enfatiza a questão da maneira como as pessoas criam expectativas quanto ao futuro. As expectativas desempenham papel fundamental na economia porque influenciam todos os tipos de comportamento econômico.

Assim, quando os *policymakers* calculam o efeito de qualquer mudança de política econômica, eles precisam saber como as expectativas das pessoas reagirão à referida mudança.

Lucas propôs o uso das expectativas racionais, mostrando que as ações dos agentes hoje não se baseiam apenas no que ocorreu no passado, mas também em suas expectativas em relação ao futuro.



A mudança foi em direção a modelos que seguiam algum tipo de “disciplina” teórica, caracterizada pela imposição de restrições entre equações de modelos empíricos e introdução do comportamento *forward looking*.

Perspectiva histórica dos Modelos DSGE

Os Modelos DSGE não recaem na Crítica de Lucas, ou na Crítica de Sims.

Isto ocorre porque os parâmetros do modelo DSGE são diretamente relacionados às preferências e à tecnologia, as quais tendem a se manter estáveis no curto e médio prazo (são parâmetros estruturais ou “deep parameters”).

Com efeito, a microfundamentação dada aos modelos DSGE sugere que seus parâmetros sejam invariantes a mudanças de regimes de política.

Perspectiva histórica dos Modelos DSGE

Esses modelos foram desenvolvidos como uma resposta à crítica de Lucas. **Crítica de Lucas:** dados históricos agregados não são bons para prever os efeitos das mudanças nas políticas econômicas nas decisões dos agentes.

Objetivo dos Modelos DSGE: estimar os “*deep parameters*” que são invariantes a políticas. Esses “*deep parameters*” representam preferências, tecnologia da produção etc. Esses “*deep parameters*” governam o comportamento individual. E isso fornece microfundamentos aos Modelos DSGE.

Modelos DSGE modernos são microfundamentados e possuem “*deep parameters*” que devem ser invariantes às mudanças na política econômica, portanto, em princípio, não estão sujeitos à crítica de Lucas.

Perspectiva histórica dos Modelos DSGE

Mas microfundamentos resultam em enormes desafios. Muitas informações são deixadas de fora ou o modelo se torna muito complicado (p. ex., custos de fricção etc.).

Por causa dessas complicações, os modelos DSGE são preferidos por acadêmicos e pesquisadores em Bancos Centrais, e não por políticos ou *policymakers*.

Modelos DSGE são modelos empíricos com elevado grau de coerência teórica, e isso os tornam atrativos como um laboratório para experimentos de políticas. Cenários de política ou previsão? Resposta: ainda tema de debate (não consensual).

Perspectiva histórica dos Modelos DSGE

Em termos gerais, existem duas fases principais dos Modelos DSGE: Modelos de Ciclos Reais de Negócios (*Real Business Cycle* - RBC) & Modelos Novo Keynesianos.

1ª Fase: modelos RBC foram inicialmente introduzidos por Kydland & Prescott (1982) visando investigar se os choques reais são a principal fonte das flutuações do ciclo econômico.

2ª Fase: Rotemberg & Woodford (1997) adicionaram aos modelos RBC as seguintes características: fricções no lado monetário, especificamente ajuste de preços e salários, e mercados monopolisticamente competitivos. Surgem os Modelos DSGE novo-keynesianos.

Convergência metodológica

Macroeconomistas atualmente concordam com a existência de uma convergência metodológica sobre os seguintes aspectos:

(1) Papel de diversos tipos de rigidez nominal na demanda agregada e fricções financeiras que produzem flutuações no produto de curto prazo, resultantes da política monetária (modelo novo-keynesiano);

(2) Ondas de progresso tecnológico que determinam o produto no médio e no longo prazos (efeitos dos choques tecnológicos, captados por meio dos modelos de crescimento econômico) *à la* modelos de ciclos reais de negócios;

(3) Percepções sobre o futuro afetam as decisões dos agentes hoje (expectativas racionais).

Convergência metodológica

Os modelos novo-keynesianos que se desenvolveram a partir daí seguiram duas perspectivas (SPANOS, 2009):

(1) O enfoque que busca coerência empírica está associado aos desenvolvimentos da metodologia “geral-para-específico” em modelos vetoriais autorregressivos cointegrados (VECM), principalmente desenvolvida na Europa, que tem suas raízes na *London School of Economics*, e pode ser compreendida como uma busca por equilíbrio entre a teoria e os dados, evitando-se os extremos.

(2) Perspectiva dos Estados Unidos, descrita como sendo o ponto de vista da preeminência da teoria (*Pre-Eminence of Theory* – PET), e tem se consolidado os modelos DSGE.

Por que Modelos DSGE? (McCandless)

“In his critique on econometric policy evaluation, Lucas makes the case that the then current macroeconomic models were essentially useless in predicting the outcomes of economic policy that was not yet in use. His solution was to build microeconomic models with clear and specific microeconomic foundations in which expectations of future government policies were included. (...)

Real Business Cycle and New Keynesian models are particularly useful for evaluating policy changes, since the changes can be put directly into the government policy equations and the resulting changes in both the long run (stationary states) and the short run dynamics can be observed. They are also being developed for forecasting and are beginning to compete reasonably well with vector autoregressions (VARs) in their forecasting power.”

Por que Modelos DSGE? (Wickens)

“It made me realize that the traditional way of doing macroeconometrics, equation by equation, had largely failed to engage the interest of macroeconomic theorists because the emphasis was too much on the dynamic specification of the model and too little on the key macroeconomic parameters, or the general equilibrium implications of the estimated model. Since any variable can be closely approximated by a univariate time-series representation, the danger in traditional macroeconometrics is that, in trying to improve goodness of fit by using a general dynamic specification, the omission of (possibly important) variables may be obscured. This indicated to me that macroeconomic theory should be given a much more important role in macroeconomic model building, and the reliance on time-series methods should be rethought.”

Por que Modelos DSGE? (Lin/McNelis)

“Quantitative answers have often come from ad hoc back-of-envelope calculations, or cursory eyeballing of charts and graphs, based on incomplete partial equilibrium models with simple backward-looking expectations. Today quantitative policy-useful recommendations can come from a rigorous analysis of well-specified, internally coherent macroeconomic models, calibrated to capture key characteristics of particular real world situations.”

Por que Modelos DSGE? (Lin/McNelis)

Two key findings:

(a) They resolved a age-old puzzle. (Monetary non-neutrality, delayed effect on prices)

(b) They are useful for forecasting. (Smets and Wouters)

They played an important role in the analysis of policy questions, for exemple, the discussion of inflation targeteing and the Taylor Principle.

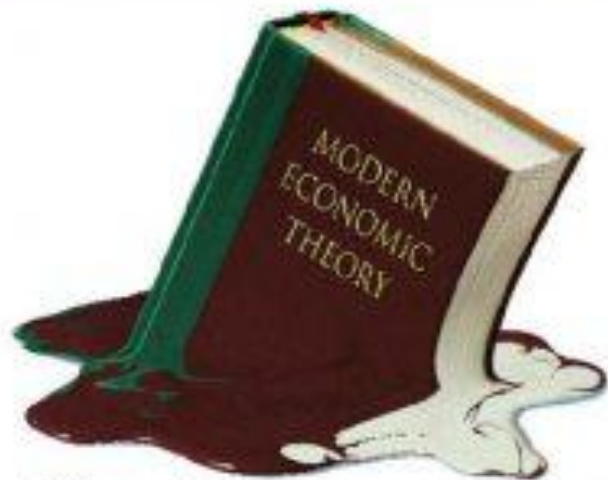
Apêndice C - Limitações dos Modelos DSGE

Feldstein sobre o risco de crises (1991)

“Although cyclical fluctuations remain a problem throughout the industrial world, the depression of the 1930s was the last time that we experienced the kind of financial crisis followed by economic collapse that had been a recurrent problem in both the United States and Europe for centuries. The long period of time since the last such crisis may explain why economists have paid relatively little attention to the subject in recent decades.

Instead, economic research has focused on improving our understanding of the normal functioning of the economy and on developing policies that can make small but important improvements: bringing the inflation rate closer to zero, lowering the rate of unemployment, and reducing distortions in the use of resources.”

Modelos DSGE e a Crise de 2008-2009



**Where it went wrong—and how
the crisis is changing it**

*“The criticism of real business cycle models and their close cousins, the so-called New Keynesian models, is misdirected and reflects a misunderstanding of the purpose for which those models were devised. **These models were designed to describe aggregate economic fluctuations during normal times when markets can bring borrowers and lenders together in orderly ways, not during financial crises and market breakdowns.**”* (Thomas Sargent)

A Crise e suas implicações (Christiano)

Not predicted by DSGE models.

(i) Models are tools that can help check and clarify your thinking, but won't tell you what to think about.

(ii) People were thinking about the 'Great Moderation', not about the possibility that a shock would emerge from the financial system and rock the economy.

Why were financial factors not generally included in models?

(i) There was a general consensus in macroeconomics (sort of encouraged by observations) that financial markets are not a source of instability.

(ii) These possibilities were left out of the consensus DSGE models.

A Crise e suas implicações (Christiano)

However, the profession was not at a complete loss. When the crisis hit, policymakers had models available to help conceptualize what was happening and what should be done:

Diamond-Dybvig model of bank runs.

Models of liquidity shortage (Kiyotaki-Moore).

Models of banking (Bernanke and Gertler and others).

A Crise e suas implicações (Christiano)

New policy questions are on the table.

Are the financial markets a source of shocks?

Are the financial markets a source of propagation of shocks?

How should central banks respond to widening credit spreads?

What dangers are we exposed to because of the zero lower bound on the interest rate, and how can we avoid them?

Macro-prudential policy

What should leverage restrictions on banks be?

How should these restrictions move with the business cycle?

A Crise e suas implicações (Christiano)

Dynamic, Stochastic, General Equilibrium Models are likely to remain a central policy tool for a long time.

The current generation of models will undergo major developments in response to the crisis.

However, we will most likely never have models that are so complete that we will anticipate every possible crisis.

(a) Models, to be useful, must educate one's intuition. This means they must be simple and abstract from things.

(b) Occasionally, one of those things will 'get' you.

(c) What you can hope for is that when that happens, you'll be prepared.

Limitações dos Modelos DSGE: Resumo

Dificuldade de lidar com algumas questões de interesse;

Hipóteses *ad hoc*;

Parâmetros não necessariamente estruturais;

Problemas de identificação;

**Apêndice D - Modelos DSGE *versus*
Modelos de Equilíbrio Geral Computável
(*Computable General Equilibrium Model -
CGE*)**

Introdução aos Modelos DSGE

É geralmente aceito que um bom modelo macroeconômico deve permitir rigidez salarial, basear-se no comportamento otimizador dos agentes microeconômicos e que o comportamento individual deve satisfazer as expectativas racionais.

Salários e preços imperfeitamente flexíveis associados a imperfeições nos mercados de trabalho e/ou produtos;
Comportamento de otimização intertemporal racional de todos os agentes; Expectativas racionais.

A estrutura de um Modelo DSGE é similar à estrutura de um modelo CGE.

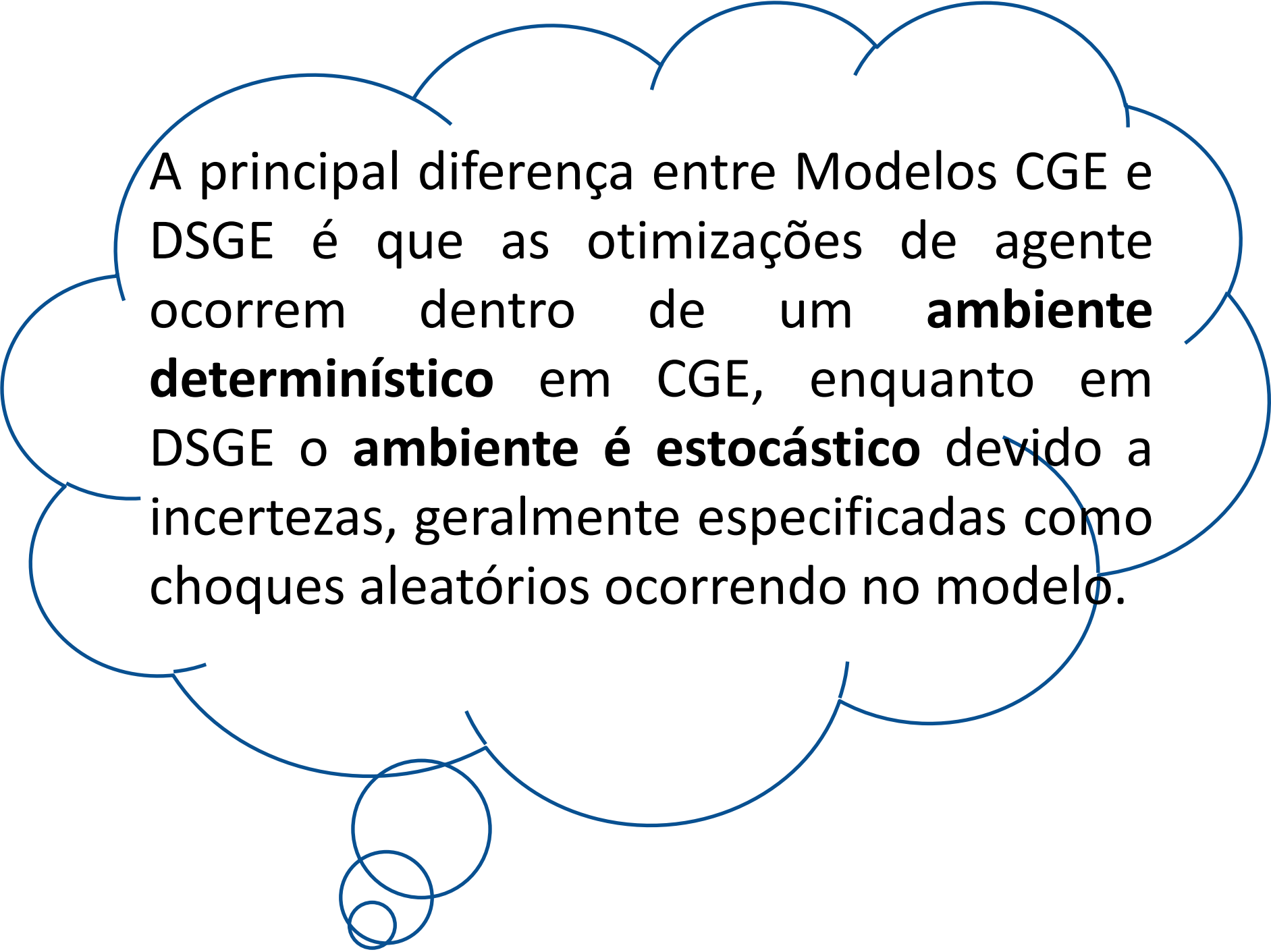
Modelos CGE possuem 4 características:

1 - O foco dos modelos CGE está nos padrões de equilíbrio de alocação de recursos.

2 - Esses modelos pressupõem mercados perfeitamente competitivos.

3 - Produção representada por produtor que maximiza o lucro, sujeito a restrições de tecnologia, escolhe o fornecimento ideal de um produto e a demanda por fatores.

4 - Consumo representado por uma família maximizadora de utilidade representativa que escolhe a oferta ótima de fatores e a demanda por um produto.



A principal diferença entre Modelos CGE e DSGE é que as otimizações de agente ocorrem dentro de um **ambiente determinístico** em CGE, enquanto em DSGE o **ambiente é estocástico** devido a incertezas, geralmente especificadas como choques aleatórios ocorrendo no modelo.