

Macroeconomia Avançada

Aula 5: Modelos de Geração Sobrepostas

Informativo

Essa nota de aula é um resumo dos principais tópicos constantes nas referências bibliográficas da disciplina Macroeconomia Avançada, lecionada no Programa de Doutorado e Mestrado em Economia do Instituto Brasileiro de Ensino, Desenvolvimento e Pesquisa (IDP).

Eu destaco que essa nota de aula não tem fins comerciais, servindo exclusivamente como material de apoio às aulas dessa disciplina.

Quaisquer erros e omissões são de minha inteira responsabilidade.

Contribuições e considerações podem ser enviadas para:

sergio.gadelha@idp.edu.br ou
professor.sergio.gadelha@gmail.com

Informativo

- Uma característica fundamental do modelo de crescimento neoclássico é que ele admite uma família representativa.
- Entretanto, para muitas questões relevantes, essa não é uma hipótese apropriada.
- Por exemplo, se nós quisermos compreender a interação entre diferentes gerações, precisamos abandonar a hipótese de uma família representativa.
- Hoje nós analisaremos uma economia na qual novas famílias surgem (nascem) ao longo do tempo.
- Uma característica importante é que as decisões tomadas pelas gerações mais velhas afetarão os preços enfrentados pelas gerações que ainda não nasceram.
- Os teoremas do bem-estar não necessariamente se aplicam ao modelo de Gerações Sobrepostas (OLG, do inglês *Overlapping Generations*).

Modelo de Gerações Sobrepostas

► Assim como nos modelos anteriores, assume-se que o tempo é discreto.

► Em diversas situações supor um agente representativo não é o ideal. **Uma maneira de modelar heterogeneidade é incluir diferentes “gerações” na economia:**

- (i) Famílias não vivem período infinitos;
- (ii) Novas famílias nascem com o tempo;
- (iii) Velhos e jovens vivem no mesmo espaço econômico.

► Novas interações econômicas: decisões dos mais velhos afetam os preços enfrentados pelas gerações jovens.

Modelo de Gerações Sobrepostas

- ▶ Ao invés de assumir que as pessoas vivem por um período infinito de tempo, considera-se que as pessoas vivem por apenas um número finito de períodos.
- ▶ Por simplicidade, admite-se que o número de períodos que o agente vive é de conhecimento comum.
- ▶ Apesar dos agentes viverem por um período finito de tempo, a economia existe por um número infinito de períodos. Isso permite que instituições como o governo possam existir mesmo depois da morte dos agentes. A cada período nasce uma geração e morre outra, de forma que o número de gerações existentes em cada período é sempre igual.

Abordagem

Samuelson: OLG com dotação e trocas (sem produção)

- Usado para demonstrar a necessidade de recursos (dinheiro) em uma economia não-eficiente.

Diamond: OLG com produção

- Usado para estudar acumulação de capital e crescimento em uma economia não-eficiente.

► Nesta aula, nós iremos focar apenas no modelo com produção.

Modelo de Gerações Sobrepostas: Premissas

Estrutura Básica

Estrutura Avançada

Hipóteses

(1) Tempo discreto; agentes vivem por 2 períodos. Significa que o tempo é dividido em períodos separados:

$$t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

► Cada indivíduo nasce em um período t e vive apenas dois períodos: **Juventude** ($a = 1$) e **Velhice** ($a = 2$)

► Assim, um agente nascido em t :

é jovem em t ;

é velho em $t + 1$;

morre após $t + 1$.

► Vamos estudar o caso analítico: 2 gerações.

Hipóteses

(2) Geração nascida em t vive dois períodos $a = 1, 2$ (em outras palavras, analisa-se duas gerações). A expressão **geração** t designa todos os indivíduos que nasceram no período t .

Período	Geração Jovem	Geração Velha
t	Geração t	Geração $t - 1$
$t + 1$	Geração $t + 1$	Geração t
$t + 2$	Geração $t + 2$	Geração $t + 1$

- Jovens (Geração t): trabalha, recebe renda, consome e poupa.
- Velhos (Geração $t - 1$): já trabalhou quando era jovem; vive de poupança acumulada ou dos benefícios recebidos; consome.

Hipóteses

► Gerações sobrepostas: a geração jovem e a geração velha convivem simultaneamente. Exemplo:

Período 0

nasce a geração 0;
ela é jovem.

Período 1

nasce a geração 1;
geração 1 é jovem;
geração 0 é velha.

Período 2

nasce a geração 2;
geração 2 é jovem;
geração 1 é velha;
geração 0 morreu.

Hipóteses

(3) Função utilidade ao longo da vida:

$$u(c_t^1, c_{t+1}^2) = u(c_t^1) + \beta u(c_{t+1}^2)$$

onde:

c_t^1 = consumo quando jovem;

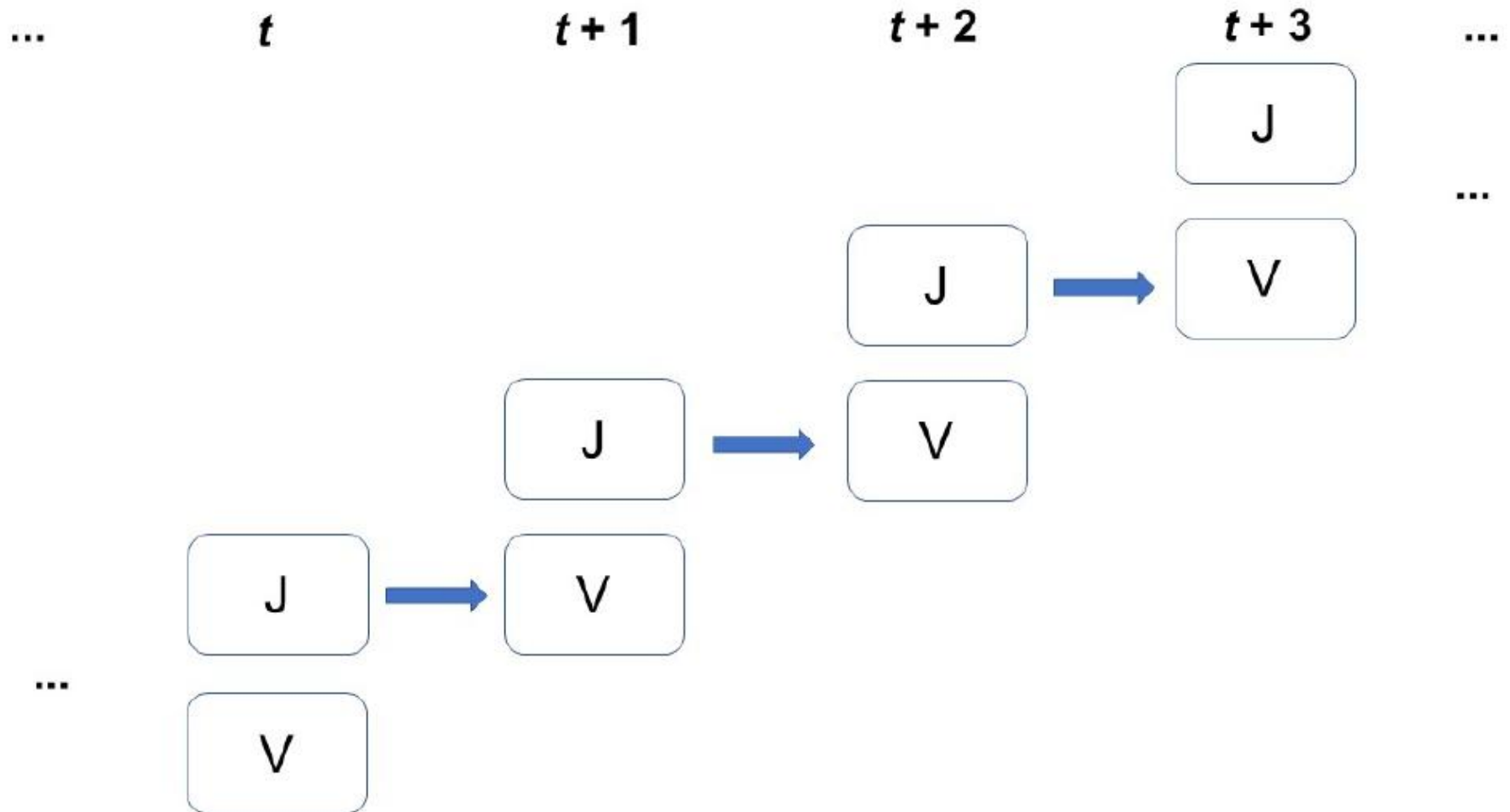
c_{t+1}^2 = consumo quando velho;

β = fator de desconto intertemporal.

Modelo de Gerações Sobrepostas

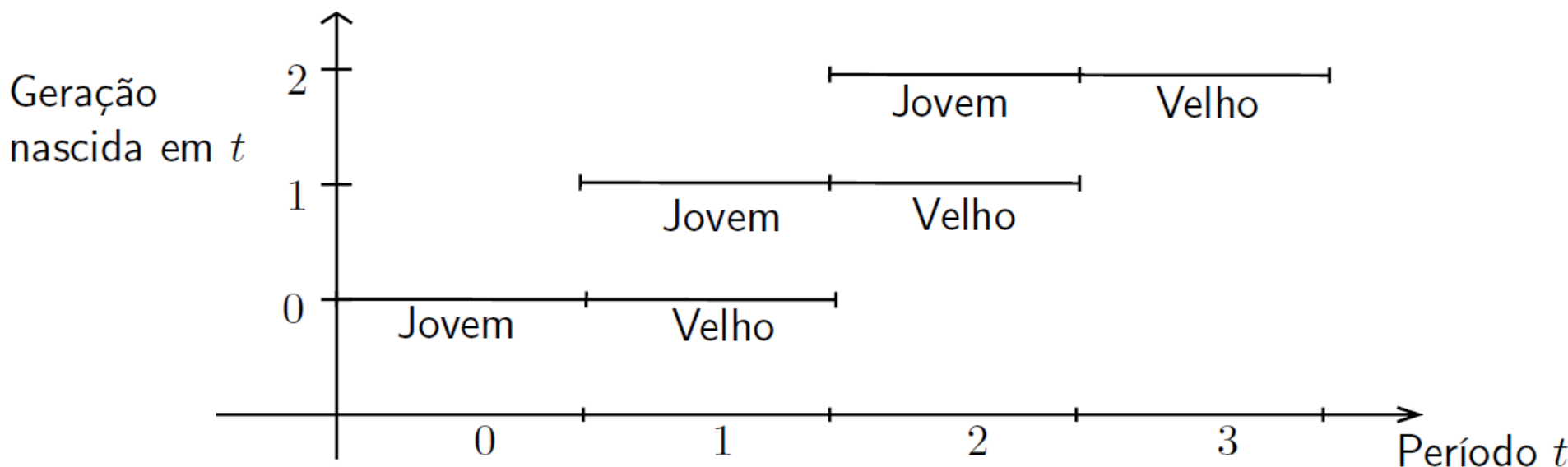
- ▶ Base de modelos quantitativos para estudar previdência, capital humano, desigualdade de renda/riqueza, etc (modelos com N - gerações).
- ▶ Vamos estudar o caso analítico: 2 gerações.
- ▶ As figuras a seguir ilustram a sobreposição de gerações para o caso onde cada geração vive por dois períodos na economia:

Modelo de Gerações Sobrepostas



Modelo de Gerações Sobrepostas

► Note que no primeiro período existem os chamados “velhos iniciais”, algumas vezes é importante considerá-los com fins de analisar os impactos de bem-estar de uma dada política. Em outras ocasiões, assume-se que a economia não teve início e desconsidera-se a existência dos “velhos iniciais”, como na figura a seguir:



Em resumo

- Estudos canônicos: Samuelson (1958), Diamond (1965) e Tirole (1985).
- Tempo discreto: $t \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$
- Apesar do tempo ser infinito, os indivíduos têm vidas finitas:
 - ▶ Indivíduos vivem dois períodos: **juventude** e **velhice**
- Em um dado instante t , a economia é formada por 2 gerações: **jovens** e **velhos**:
 - ▶ Jovens nasceram em t , e serão velhos em $t + 1$
 - ▶ Velhos nasceram em $t - 1$
- Foco no equilíbrio descentralizado.
- Hipótese simplificadora comum: dotação de uma unidade de trabalho quando jovem, apenas consumo quando idoso.

Modelo de Gerações Sobrepostas: Premissas

Estrutura Básica

Estrutura Avançada

Alocação intertemporal

- **O problema a ser resolvido:**
 - Dado um conjunto de dotações iniciais, como alocar os bens de forma ótima ao longo do tempo.
 - O que significa que a alocação seja ótima?

O que vamos aprender?

- 1) Caracterização do **equilíbrio descentralizado**: Resultado de mercado.
 - 2) Estudar o ótimo de comando: alocação do **planejador central**.
 - 3) Compreender o conceito e as implicações da **regra de ouro**.
- O modelo é baseado em Diamond (1965) e Samuelson (1958).

Economia Descentralizada

As Famílias

- Agentes: população jovem, idosa e empresas.
- Considere que as famílias vivem dois períodos.
- A oferta de trabalho é inelástica e ocorre no primeiro período.
- O número de indivíduos nascidos em t é N_t e evolui segundo:

$$N_t = N_0(1 + n)^t$$

Onde n é a taxa de crescimento da população e N_0 é a população inicial.

As Empresas

- As empresas atuam de forma competitiva.
- A produção possui uma tecnologia com retornos constantes de escala: $Y_t = F(K_t, N_t)$
- Reescrevendo a função de produção em termos per capita, temos:

$$y_t = F\left(\frac{K_t}{N_t}, 1\right) = f(k_t)$$

- $f(k_t)$ é diferenciável, estritamente côncava e satisfaz as **condições de Inada**:
 - $f(0) = 0$
 - $f'(0) = \infty$
 - $f'(\infty) = 0$

Problema das Famílias

- As famílias devem maximizar sua utilidade, representada da seguinte forma:

$$\max_{\{c_{1,t}, c_{2,t+1}\}} u(c_{1,t}) + \frac{1}{1+\rho} u(c_{2,t+1}) \quad (1)$$

Onde $u()$ é a função de utilidade da família nascida em t e $1/(1+\rho)$ é o **fator de desconto intertemporal** da família.

- Sujeito a:

$$c_{1,t} + s_t = w_t \quad (2)$$

$$c_{2,t+1} = (1 + r_{t+1})s_t \quad (3)$$

Problema das Famílias

- A condição de primeira ordem (CPO) associada a este problema é:

$$u'(c_{1,t}) = \frac{1 + r_{t+1}}{1 + \rho} u'(c_{2,t+1}) \quad (4)$$

Intuição: na margem, a utilidade de poupar uma unidade do bem de consumo deve ser equivalente à utilidade de consumi-la amanhã.

- A função de poupança é então:

$$s_t = s(w_t, r_{t+1}), s_w \in (0,1), s_r \geq \leq 0 \quad (5)$$

Problema das Empresas

- O objetivo das empresas é maximizar o nível de lucro sujeito à tecnologia (função de produção):

$$\max_{\{K_t, N_t\}} \Pi_t = F(K, N) - w_t N_t - r_t K_t \quad (6)$$

- Ao derivar, encontramos as demandas ótimas dos fatores de produção:

- **Trabalho:**

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) \quad (7)$$

- **Capital:**

$$r_t = f'(k_t) \quad (8)$$

Condições de Equilíbrio

- Equilíbrio do mercado do capital:

$$K_{t+1} = N_t s(w_t, r_{t+1}) \quad (9)$$

- Em termos per capita:

$$(1 + n)k_{t+1} = s(w_t, r_{t+1}) \quad (10)$$

- Lei de movimento do capital:

$$k_{t+1} = \frac{s[w(k_t), r(k_{t+1})]}{1 + n} \quad (11)$$

Estabilidade

- Para entender a dinâmica do modelo, deve-se computar a seguinte equação:

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{-s_w(k_t)k_t f''(k_t)}{1 + n - s_r(k_{t+1})f''(k_{t+1})} \quad (12)$$

- O **numerador é positivo** porque aumentos de capital estão associados a aumentos de salários e, portanto, de poupança.
 - O **denominador tem sinal ambíguo** devido ao sinal de s_r .
- Em torno do estado estacionário, a **estabilidade LOCAL** requer:

$$\left| \frac{-s_w(k^*)k^* f''(k^*)}{1 + n - s_r(k^*)f''(k^*)} \right| \leq 1 \quad (13)$$

Planejador Central

Função de Bem-Estar Social

- O planejador central tem a seguinte **função de bem-estar social**:

$$U = \frac{1}{1+\rho} u(c_{2,0}) + \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+R} \right)^t \left[u(c_{1,t}) + \frac{1}{1+\rho} u(c_{2,t+1}) \right] \quad (1)$$

- Onde **R** é o **fator de desconto do planejador central**, que representa o quanto o planejador valoriza as gerações futuras.
 - Se R é positivo, o planejador central dá menos importância às gerações futuras.
 - Se $R = 0$, o planejador dá a mesma importância a cada geração.
 - Se $1 + R = \frac{1}{1+n}$ o peso atribuído a cada geração depende do seu respectivo tamanho.

Restrição de Recursos

- A restrição de recursos é:

$$F(K_t, N_t) = K_{t+1} - K_t + N_t c_{1,t} + N_{t-1} c_{2,t} \quad (2)$$

- Em termos per capita, temos que:

$$f(k_t) = (1 + n)k_{t+1} - k_t + c_{1,t} + \frac{c_{2,t}}{1 + n} \quad (3)$$

Condições de Primeira Ordem

- As condições de primeira ordem são:

$$[c_{2,t}]: \frac{u'(c_{2,t})}{1 + \rho} = \frac{u'(c_{1,t})}{(1 + R)(1 + n)} \quad (4)$$

- $[c_{2,t}]$ É uma condição ótima **intratemporal**, na qual a taxa marginal de substituição entre gerações depende da relação $\frac{1+\rho}{(1+R)(1+n)}$ que é a taxa marginal de transformação.

$$[k_t]: (1 + n)u'(c_{1,t}) = \frac{1 + f'(k_{t+1})}{1 + R} u'(c_{1,t+1}) \quad (5)$$

- $[k_t]$ Trata-se de uma condição **intertemporal** na qual a taxa marginal de substituição de cada geração é ajustada pelo fator de desconto do planejador central.

Condições de Primeira Ordem

- Combinando as equações (4) e (5), obtém-se:

$$u'(c_{1,t}) = \frac{1 + f'(k_t)}{1 + \rho} u'(c_{2,t+1}) \quad (6)$$

Essa condição ótima descreve a alocação intertemporal entre gerações ao longo do tempo.

- No estado estacionário, o capital satisfaz a regra de ouro modificada:

$$f'(k^*) = R + n \quad (7)$$

Modelo de Gerações Sobrepostas: Premissas

Estrutura Básica

Estrutura Avançada

Indivíduos

- Um indivíduo nascido em t consome c_{1t} em t (quando jovem) e c_{2t+1} em $t + 1$ (quando velho). Suas preferências são dadas por:

$$u(c_{1t}) + \frac{1}{1 + \rho} u(c_{2t+1})$$

- ▶ Em que $u'(\cdot) > 0$, $u''(\cdot) < 0$, $u'(0) = \infty$. O **parâmetro ρ é a taxa de desconto intertemporal (ou taxa de impaciência)**.

- ▶ $1/1 + \rho$ é o fator de desconto intertemporal

- ▶ O índice 1 indica juventude, e o índice 2 velhice; t indica o tempo.

- Jovens estão em idade ativa:

- ▶ Possuem 1 unidade de tempo para trabalho, ofertada inelasticamente; recebem salário w_t .

- ▶ Essa renda é dividida entre consumo (c_{1t}) e poupança (s_t). Poupança se torna capital no segundo período de vida.

Indivíduos

- A restrição orçamentária de uma geração nascida em t na juventude é expressa por:

$$c_{1t} + s_t = w_t$$

- Velhos estão aposentados (não tem renda do trabalho).
 - ▶ Recursos advém da renda do capital, acumulado no período anterior, e que agora é alugado às firmas; e da despoupança desses ativos.
 - ▶ Restrição orçamentária da geração nascida em t na velhice (isto é, vigente em $t + 1$):

$$c_{2t} = (1 + r_{t+1})s_t$$

Indivíduos

- O problema do indivíduo nascido em t é maximizar sua utilidade sujeito às restrições orçamentárias em cada período, tomando preços como dados (no caso salário em t e o aluguel do capital em $t + 1$):

$$\max_{\{c_{1t}, c_{2t+1}, s_t\}} u(c_{1t}) + \frac{1}{1 + \rho} u(c_{2t+1})$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} c_{1t} + s_t &= w_t \\ c_{2t} &= (1 + r_{t+1})s_t \\ w_t, r_{t+1} &\text{ dados} \end{aligned}$$

Indivíduos

- Substituindo as restrições na função objetivo:

$$\max_{\{s_t\}} \left\{ u(w_t - s_t) + \left(\frac{1}{1 + \rho} \right) u[(1 + r_{t+1})s_t] \right\}$$

- A condição de primeira ordem com relação a s_t é:

$$-u'(c_{1t}) + \left(\frac{1}{1 + \rho} \right) (1 + r_{t+1})u'(c_{2t+1}) = 0$$

- Portanto:

$$u'(w_t - s_t) = \left(\frac{1 + r_{t+1}}{1 + \rho} \right) u'[(1 + r_{t+1})s_t] \quad (1.1)$$

- A partir de (1.1), tem-se que a poupança por jovem é definida implicitamente por:

$$s_t = s(w_t, r_{t+1})$$

Função Poupança

- Como s_t varia em função de w_t e r_{t+1} ? Primeiro, deve-se analisar o efeito do salário (w_t). Diferenciando totalmente, para dado valor de r_{t+1} (ou seja, com $dr_{t+1} = 0$):

$$\begin{aligned} & u''(c_{1t})(dw_t - ds_t) \\ &= \left(\frac{1}{1 + \rho} \right) \{ (1 + r_{t+1})s_t \cdot u''[(1 + r_{t+1})s_t] \cdot (1 + r_{t+1})ds_t \} \end{aligned}$$

$$u''(c_{1t})(dw_t - ds_t) = \left[\frac{(1 + r_{t+1})^2}{1 + \rho} \right] u''(c_{2t+1})ds_t \quad (1.2)$$

- Note que, a partir de (1.2), uma alteração nos salários levará a uma alteração da poupança dos agentes na mesma direção:

$$\frac{\partial s_t}{\partial w_t} = \left\{ \frac{u''(c_{1t})}{u''(c_{1t}) + u''(c_{2t+1}) \left[\frac{(1 + r_{t+1})^2}{1 + \rho} \right]} \right\} \in (0,1) \quad (1.3)$$

► dado que $u''(c) < 0$

Função Poupança

- Como a utilidade é côncava, os indivíduos têm preferência por trajetórias de consumo mais suaves ao longo do tempo.
- ▶ Um aumento em w significa que a renda do primeiro período se expandiu, sem variar a renda do segundo período.
- ▶ Para manter o consumo relativamente estável no tempo, os indivíduos tentarão “espalhar” esse aumento de renda ao longo da vida. Assim, parte dessa renda é consumida hoje, e parte é poupada. Por causa disso, a derivada acima está entre zero e 1.
- O efeito de r_{t+1} sobre poupança não é tão evidente. Para ver isso, suponha que o indivíduo possui utilidade tipo CRRA, isto é:

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}, & \gamma \neq 1 \\ \ln(c), & \gamma = 1 \end{cases}$$

▶ Assim, $u'(c) = c^{-\gamma}$

Função Poupança

- Voltando à condição de primeira ordem (1.1), segue que, nesse caso:

$$(w_t - s_t)^{-\gamma} = \left[\frac{1 + r_{t+1}}{1 + \rho} \right] [(1 + r_{t+1})s_t]^{-\gamma}$$

- Ou seja:

$$\left(\frac{w_t - s_t}{s_t} \right)^{-\gamma} = \frac{(1 + r_{t+1})^{1-\gamma}}{1 + \rho}$$

$$\frac{w_t}{s_t} - 1 = \frac{(1 + \rho)^{1/\gamma}}{(1 + r_{t+1})^{(1-\gamma)/\gamma}}$$

- Isolando a poupança:

$$s_t = \left[\frac{1}{1 + \frac{(1 + \rho)^{1/\gamma}}{(1 + r_{t+1})^{(1-\gamma)/\gamma}}} \right] w_t$$

Função Poupança

- Note de (1.3) que $\partial s_t / \partial w_t \in (0,1)$.
- Repare também que variações no aluguel do capital terão efeito ambíguo na poupança dos agentes. Mais precisamente:

$$\frac{\partial s_t}{\partial r_{t+1}} \begin{cases} > 0, & \text{se } \gamma < 1 \\ = 0, & \text{se } \gamma = 1 \\ < 0, & \text{se } \gamma > 1 \end{cases}$$

- Pode-se interpretar $1 + r_{t+1}$ como o preço do consumo hoje, relativo ao consumo no futuro.
- ▶ Para cada unidade que se consome no presente, deixa-se de poupar uma unidade, que corresponde a $1 + r_{t+1}$ unidades de consumo no futuro.
- ▶ Dessa forma, $1 + r_{t+1}$ é o custo de oportunidade de consumir no presente.

Função Poupança

- Assim, quando r_{t+1} aumenta, o preço do consumo hoje se eleva, dando origem a dois efeitos: o **efeito substituição** e o **efeito renda**.
- **Efeito substituição:** o consumo mais caro hoje faz com que os indivíduos substituam consumo no presente por consumo no futuro. Isso tende a elevar a poupança.
- **Efeito renda:** como os indivíduos não têm nenhuma renda no futuro além da renda derivada da poupança, eles precisarão poupar para garantir o consumo no futuro.
- ▶ Assim, são poupadores líquidos e, como tal, percebem efeito renda positivo derivado do aumento da remuneração da poupança.
- ▶ O aumento em r_{t+1} , dessa forma, induz um aumento tanto no consumo presente como no consumo futuro. Isso contribui para reduzir a poupança.

Função Poupança

- A predominância de cada efeito dependerá da **elasticidade de substituição intertemporal** (que é o inverso do parâmetro γ na função de utilidade CRRA).
- Se $\gamma < 1 \Rightarrow \uparrow \sigma$ (elasticidade de substituição intertemporal alta), o indivíduo substitui com relativa facilidade consumo corrente por consumo futuro.
- **Efeito substituição é elevado e domina.** Logo, poupança aumenta quando r_{t+1} se eleva.
- Se $\gamma > 1 \Rightarrow \downarrow \sigma$ (elasticidade de substituição intertemporal baixa), o indivíduo é intolerante a variar seu consumo no tempo..
- **Efeito substituição é baixo, e efeito renda domina.** Logo, poupança diminui quando r_{t+1} se eleva.
- Quando $\gamma = 1$ (utilidade log), o efeito renda e o efeito substituição possuem a mesma magnitude e, dessa forma, se cancelam.

Função Poupança

Valor de γ	Elasticidade intertemporal (σ)	Efeito Dominante	Impacto de r sobre a poupança
$\gamma < 1$	Alta	Substituição	s_t aumenta
$\gamma = 1$	Unitária	“empate”	s_t não muda
$\gamma > 1$	Baixa	Renda	s_t diminui

Crescimento Populacional

- População cresce à taxa n , isto é:

$$\frac{N_{t+1}}{N_t} = 1 + n$$

- ▶ Ou seja, caso $n > 0$, as gerações mais recentes serão cada vez maiores.
- ▶ Em cada instante t , se $n > 0$, há mais jovens do que velhos.
- Em um instante t , há N_t jovens e N_{t-1} velhos. População em t :

$$t = N_t + N_{t+1} = \left(1 + \frac{1}{1+n}\right) N_t$$

Firmas

- Operam função de produção $Y_t = F(K_t, N_t)$, que satisfaz retornos constantes de escala e as condições de Inada.
- Para produzir, contratam serviços de capital e trabalho:
 - ▶ Capital vem dos velhos em t , que pouparam em $t - 1$.
 - ▶ Trabalho vem dos jovens em t , que estão em idade ativa.
- Firms operam em ambiente de competição perfeita. Logo, escolhem o emprego dos fatores de produção de modo a igualar as produtividades marginais aos preços dos insumos:

$$r_t = f'(k_t)$$

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$$

Em que $k_t = K_t/N_t$ representa o capital por trabalhador, e $f(k_t) = F(K, N)/N = F(k, 1)$ é o produto por trabalhador.

- ▶ Note que N_t não é a população, mas sim o número de trabalhadores (ou seja, os jovens em t).

Equilíbrio Competitivo

- Será computado o equilíbrio competitivo da economia. Para tanto, deve-se igualar o investimento e a poupança da economia como um todo.

► Por simplicidade, suponha que não haja depreciação.

- Em tempo discreto, a lei de movimento do capital é dada por:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$$

Ou seja, o capital amanhã é o capital hoje que não foi depreciado $[(1 - \delta)K_t]$, mais o capital novo introduzido via investimento (I_t) .

- Se $\delta = 0$, então:

$$I_t = K_{t+1} - K_t$$

► Considerar uma taxa de depreciação positiva não altera os principais resultados do modelo.

Equilíbrio Competitivo

- Poupança agregada será a soma das poupanças da população:
 - Cada jovem poupa $s(w_t, r_{t+1})$, de modo que a **poupança total dos jovens** é $N_t s(w_t, r_{t+1})$.
 - Como não viverão período adicional, os velhos estão transformando sua riqueza em consumo (isto é, despoupança). Ou seja, a **poupança total dos velhos** é: $-K_t$.
- Poupança total (poupança agregada) da economia:

$$S_t = N_t s(w_t, r_{t+1}) - K_t$$

- Em equilíbrio, investimento e poupança são iguais:

$$\underbrace{K_{t+1} - K_t}_{I_t} = \underbrace{N_t s(w_t, r_{t+1}) - K_t}_{S_t}$$

$$K_{t+1} = N_t s(w_t, r_{t+1})$$

Equilíbrio Competitivo

- Dividindo pelo numero de trabalhadores em $t + 1$ e considerando que população cresce à taxa n :

$$\frac{N_t}{N_{t+1}} = \frac{N_t}{N_{t+1}} s(w_t, r_{t+1})$$

- Utilizando agora as condições de ótimo provenientes do problema da firma:

$$k_{t+1} = \left(\frac{1}{1+n} \right) s[f(k_t) - k_t f'(k_t), f'(k_{t+1})] \quad (1.4)$$

- A equação acima é a lei de movimento do capital por trabalhador, que pode ser implicitamente expressa por:

$$k_{t+1} = \phi(k_t)$$

Lei de Movimento

- Com base na lei de movimento, dada uma condição inicial $k_0 > 0$, é possível recuperar a trajetória completa do capital por trabalhador $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$.

- Dado k_0 , obtém-se k_1 :

$$k_1 = \phi(k_0)$$

Dado k_1 , obtém-se k_2 :

$$k_2 = \phi(k_1)$$

E assim por diante.

Estados Estacionários

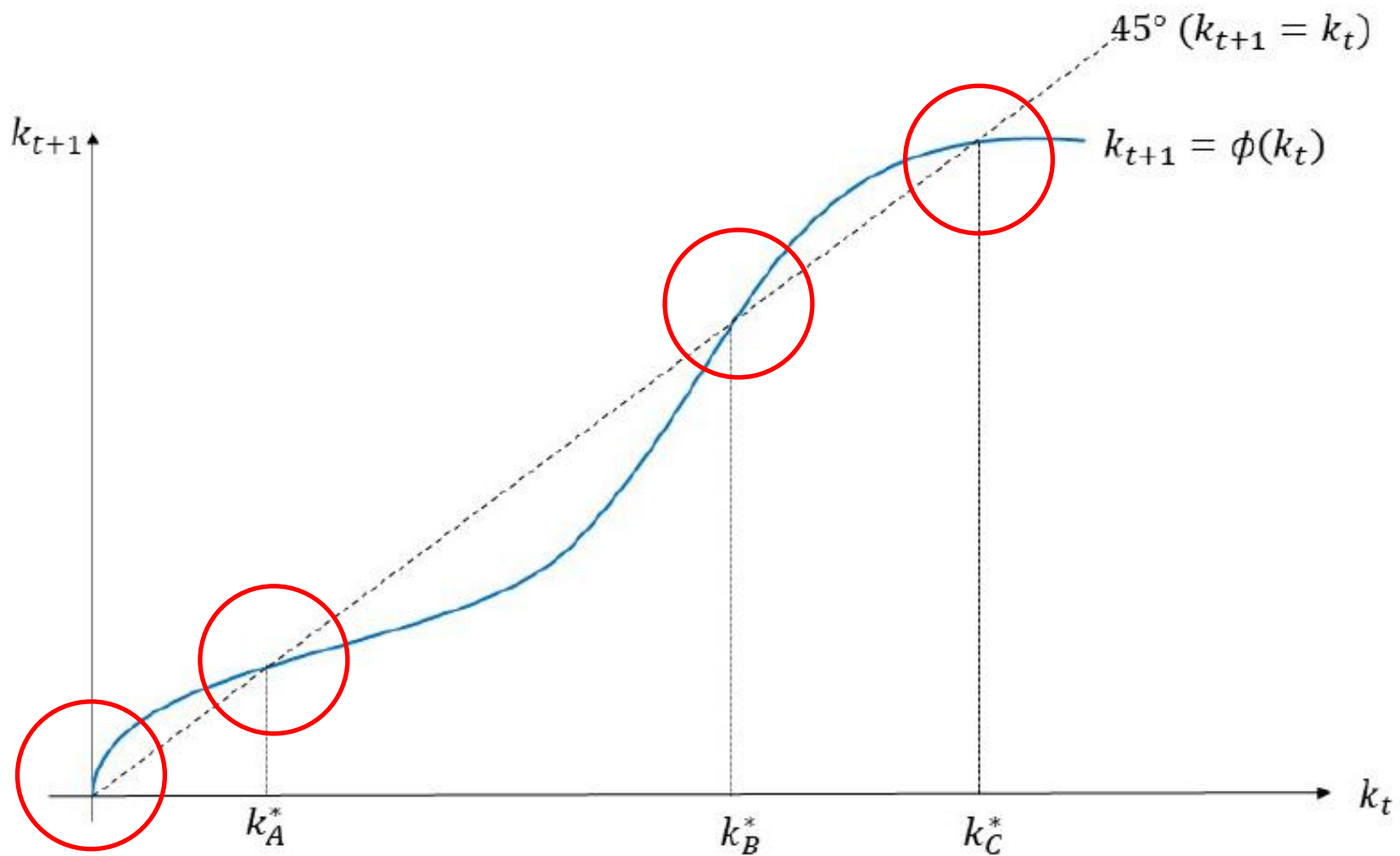
- Pode-se utilizar a lei de movimento para avaliar os estados estacionários dessa economia:

$$k_{t+1} = \phi(k_t)$$

- Assuma inicialmente que:

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \phi'(k_t) > 0$$

Figure: Figura 1



Estados Estacionários

- Por exemplo, observe a função ϕ que é apresentada na Figura 1.
- ▶ Junto com a função ϕ , exibe-se também uma reta de 45° . Ao longo dessa reta, $k_{t+1} = k_t$, de modo que o cruzamento da função ϕ com a reta de 45° denotam estados estacionários.
- ▶ No exemplo, há 4 (quatro) estados estacionários: 0 , k_A^* , k_B^* e k_C^* .
- **Os pontos k_A^* e k_C^* são localmente estáveis** pois, em face a pequenas perturbações, a economia retornará a esses pontos ao longo do tempo.

Análise do ponto k_A^*

Figure: Figura 1

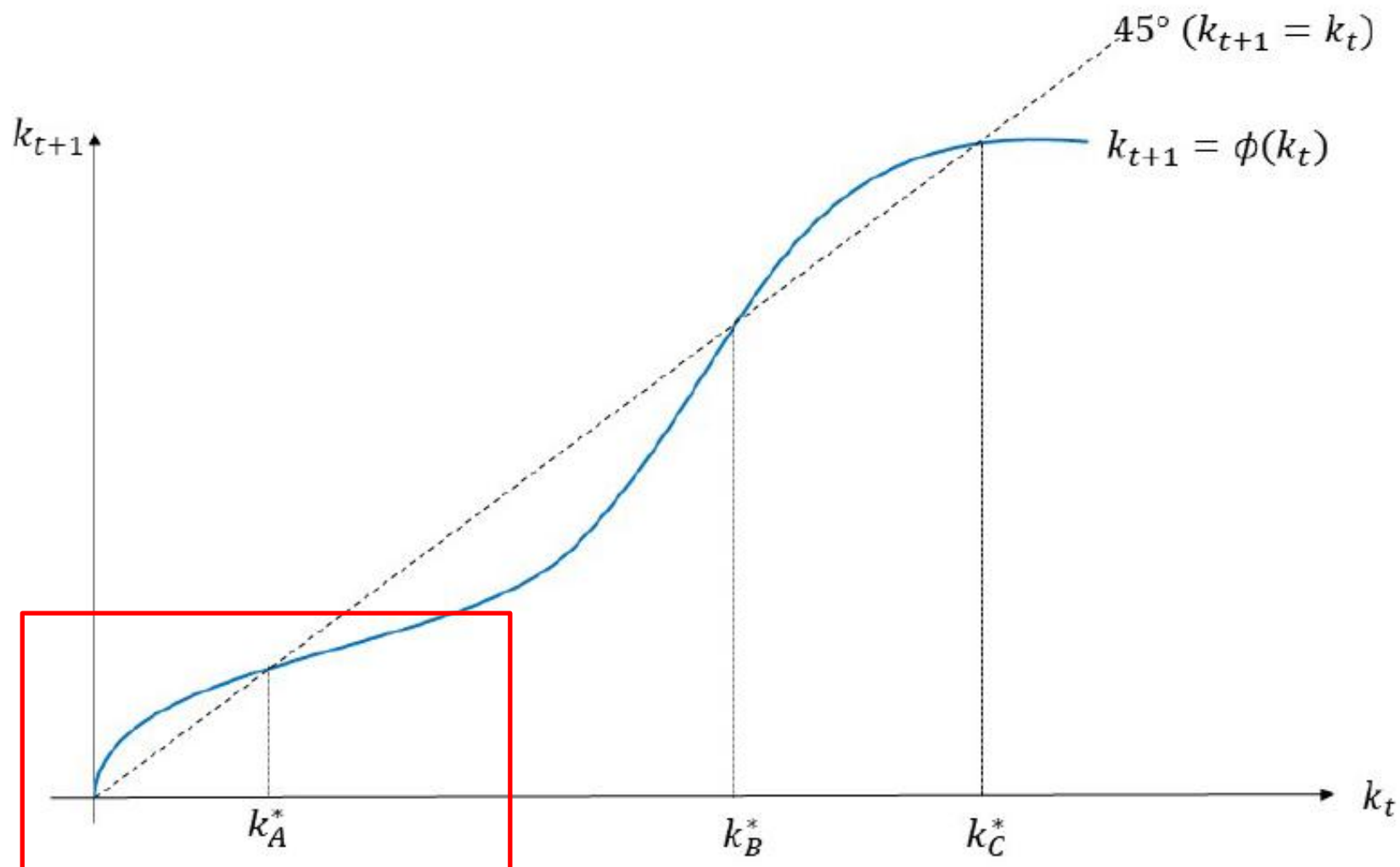
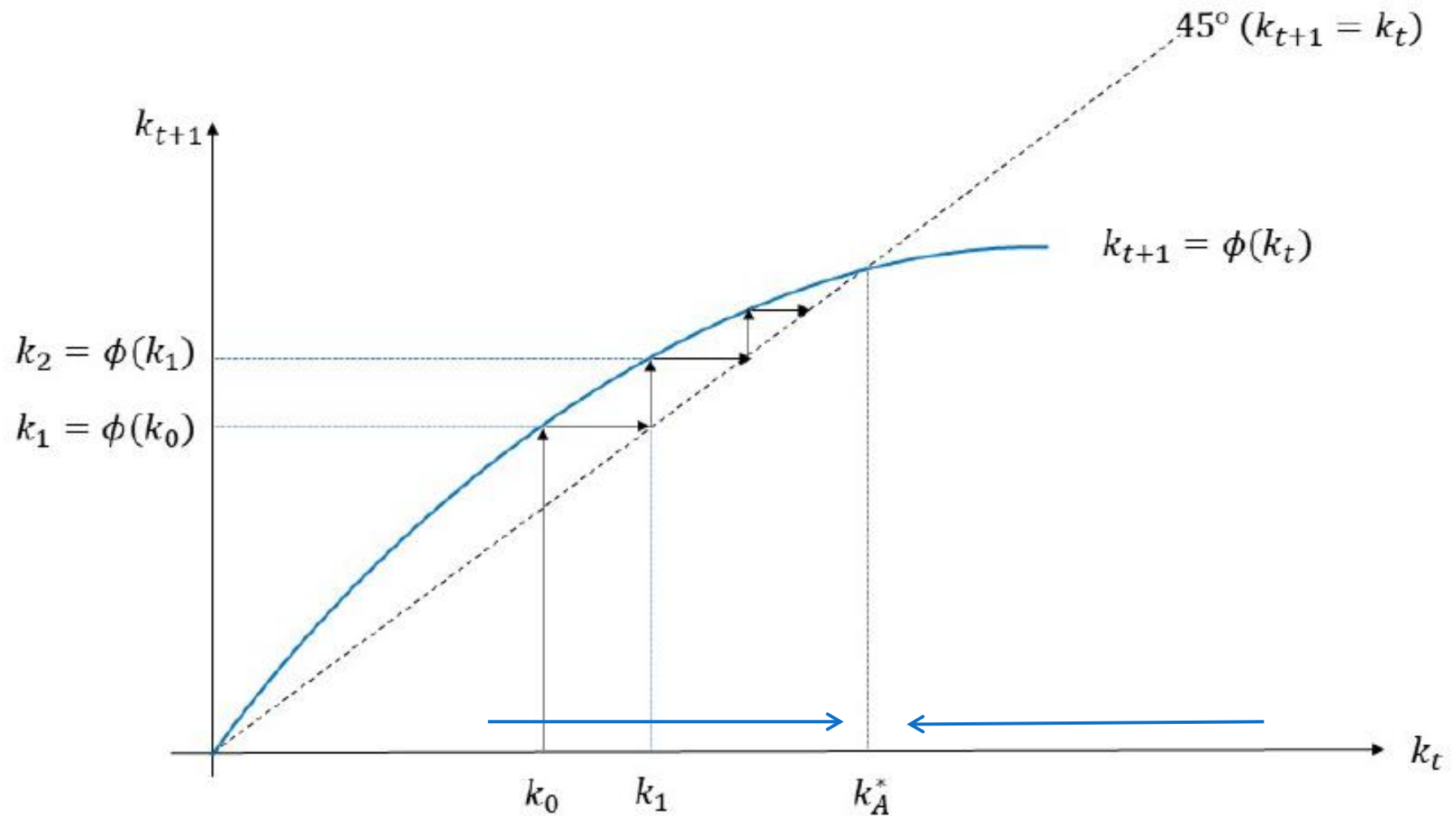


Figure: Figura 2

$$0 > \phi'(k^*) > -1$$

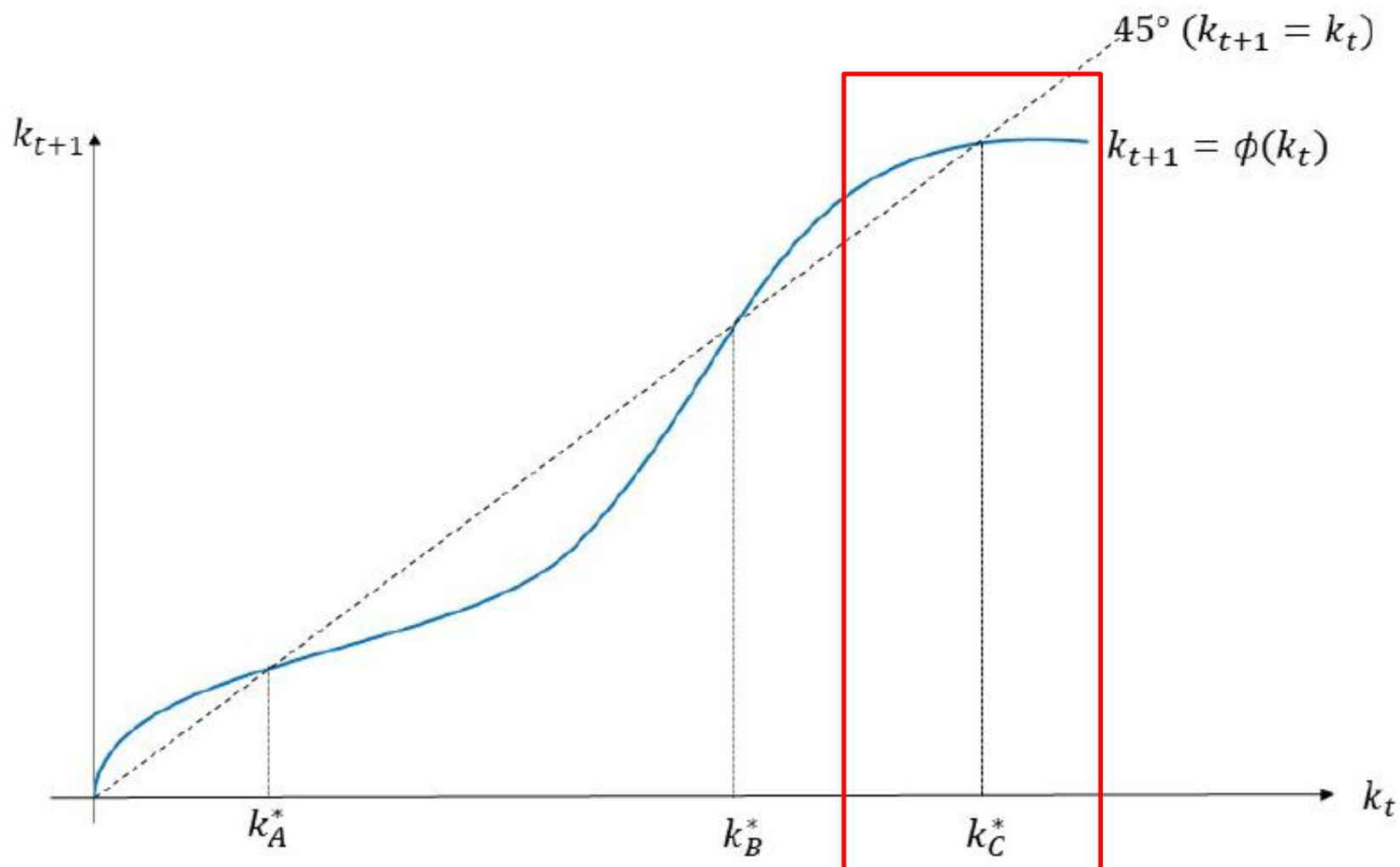


Estabilidade

- A **Figura 2** mostra o caso de k_A^* .
- $k_0 < k_A^*$. Seja uma perturbação tal que $k_0 = k_A^* - \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ pequeno. Pode-se então obter $k_1 = \phi(k_0)$ usando a equação da lei de movimento.
 - ▶ Use a reta de 45° para projetar k_1 no eixo X .
 - ▶ Volte mais uma vez à lei de movimento, dessa vez para obter $k_2 = \phi(k_1)$.
 - ▶ E assim por diante.
- Note que a economia retorna a k_A^* ao longo do tempo.
- $k_0 > k_A^*$. Seja uma perturbação tal que $k_0 = k_A^* + \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ pequeno. Pode-se perceber que o capital por trabalhador se reduzirá no tempo e tenderá a k_A^* no longo prazo.

Análise do ponto k_C^*

Figure: Figura 1



Estabilidade

- A análise de k_C^* é análoga.
- Em ambos os casos, note que a lei de movimento cruza a reta de 45° por cima.
- Derivada de ϕ avaliada nesses estados estacionários é menor que 1 (um) (a inclinação da reta de 45° é igual a 1):

$$\left. \frac{dk_{t+1}}{dk_t} \right|_{k^*} = \phi'(k^*) < 1$$

- Quando essa condição é satisfeita, pode-se dizer que o estado estacionário é localmente estável.

Análise do ponto k_B^*

Figure: Figura 1

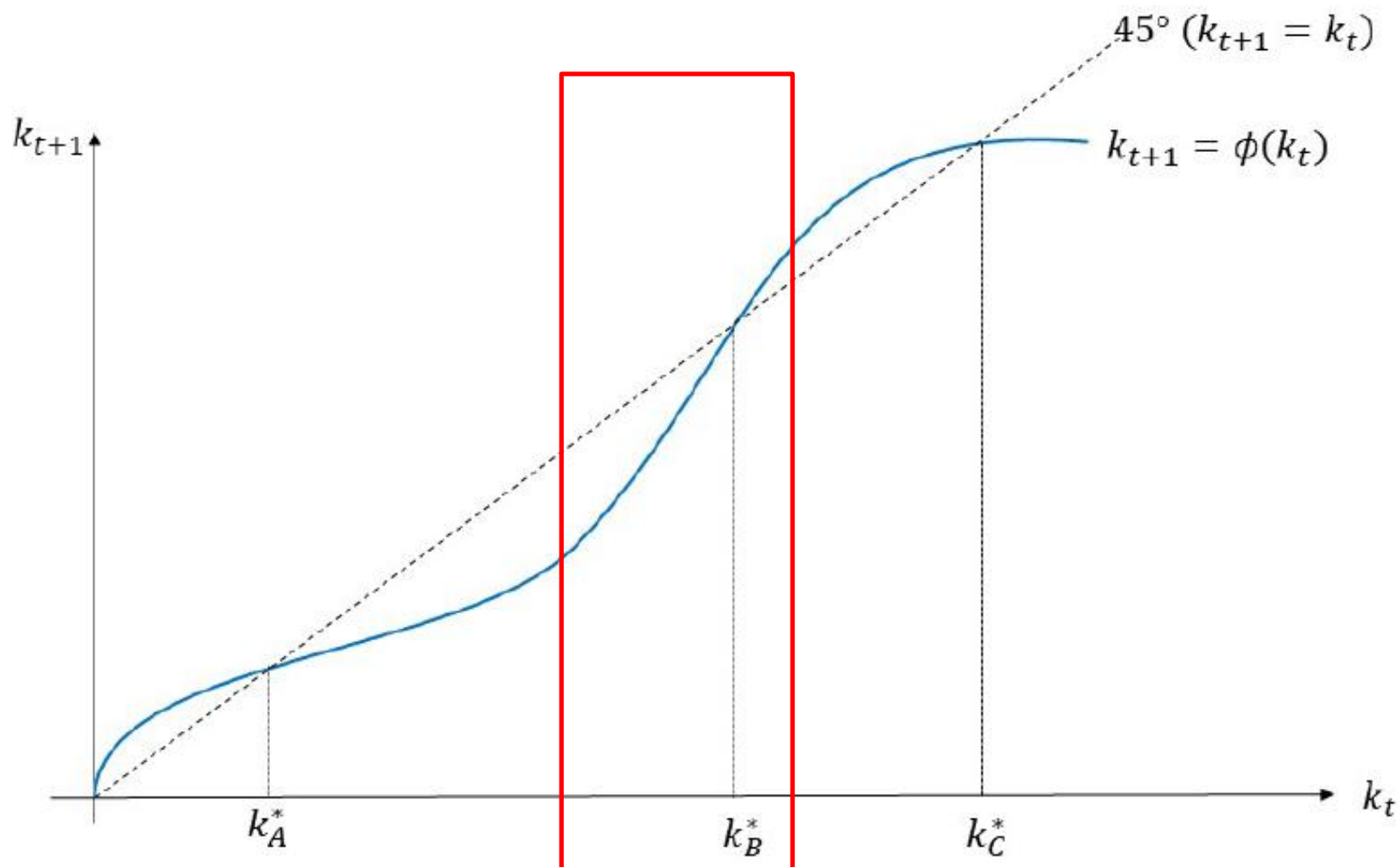
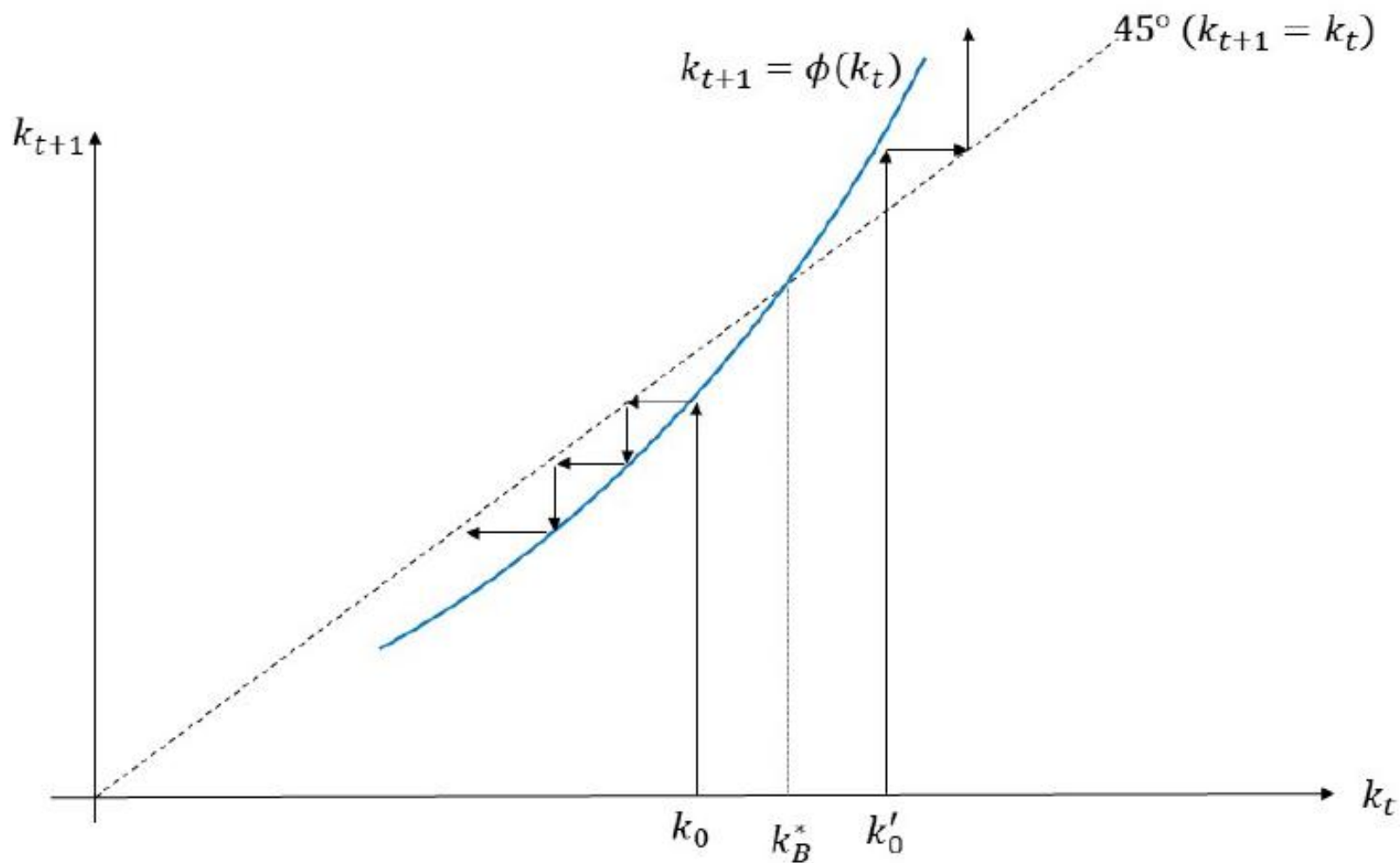


Figure: Figura 3

$$\phi'(k^*) > 1$$



Estabilidade

- Considere agora o estado estacionário k_B^* ; Ver Figura 3.
- Frente a pequenas perturbações, a economia não retornará a esse ponto ao longo do tempo.
- ▶ $k_0 < k_A^*$. Para $k_0 = k_B^* - \varepsilon$, o capital por trabalhador decresce no tempo e não se aproxima novamente de k_B^* .
- ▶ $k_0 > k_A^*$. Para $k_0 = k_B^* + \varepsilon$, o capital por trabalhador cresce no tempo e não retorna para k_B^* .
- Ou seja, a economia começa em k_B^* , e ela permanecerá nesse ponto se nada ocorrer. Mas, qualquer pequena perturbação faz com que a economia não retorne a k_B^* no longo prazo.
- Dessa forma, k_B^* é um **estado estacionário instável**. Nesse ponto, a lei de movimento cruza a renda de 45° por baixo, ou seja, a derivada de $\phi'(k_B^*) > 1$.

Regra de Estabilidade Local

- Pode-se determinar a estabilidade local de um estado estacionário pela seguinte regra:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{dk_{t+1}}{dk_t} \right|_{k^*} = \phi'(k^*) > 1 \Rightarrow \textit{instável (cruzamento por baixo)} \\ 0 < \left. \frac{dk_{t+1}}{dk_t} \right|_{k^*} = \phi'(k^*) < 1 \Rightarrow \textit{estável (cruzamento por cima)} \end{array} \right.$$

A convergência (ou divergência), nestes casos, ocorre de forma monotônica.

Regra de Estabilidade Local

- Considere agora o caso em que:

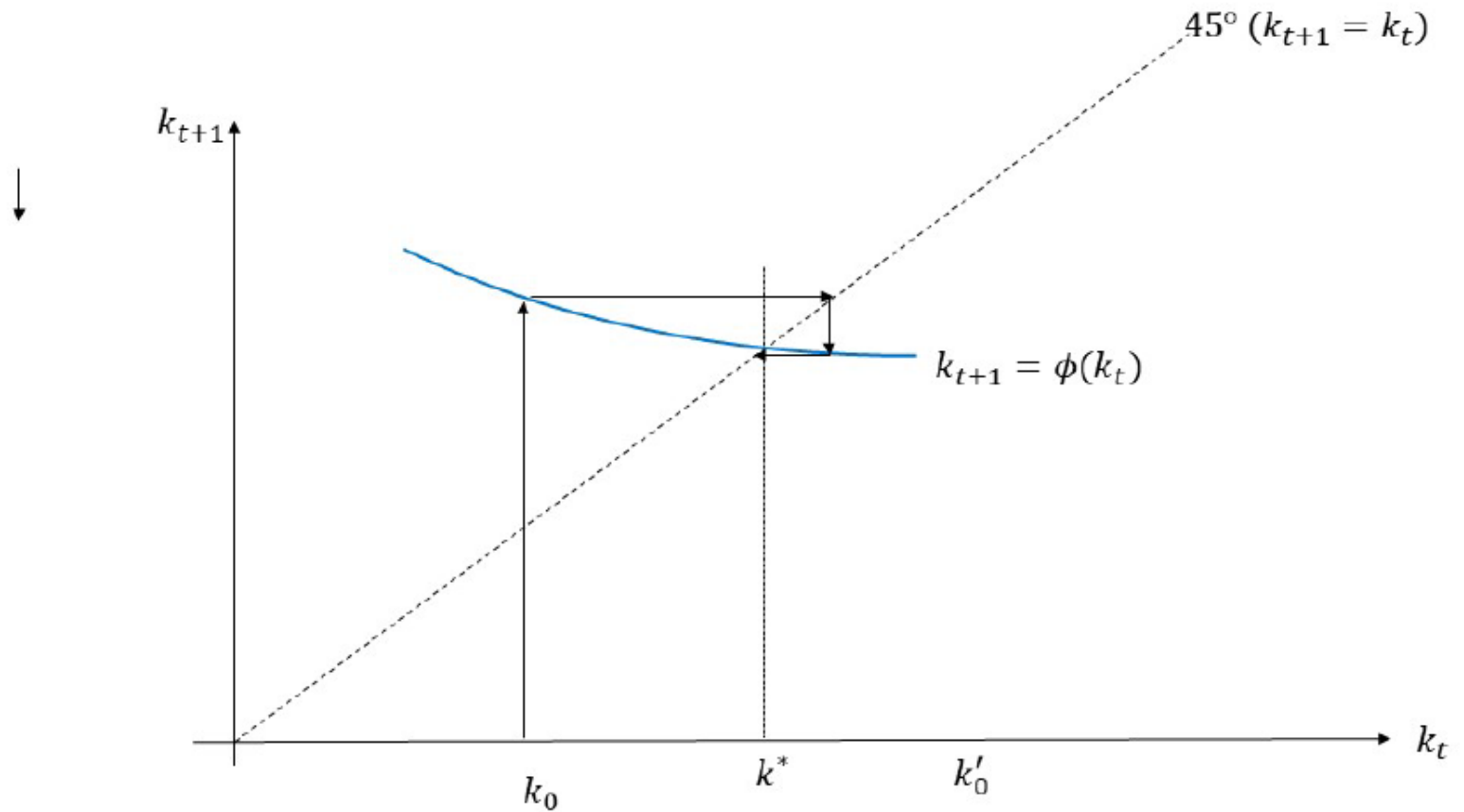
$$\left. \frac{dk_{t+1}}{dk_t} \right|_{k^*} = \phi'(k^*) = 0$$

Cujas dinâmicas possíveis estão nas Figuras 4 a 5 a seguir:

Estabilidade

Figure: Figura 4

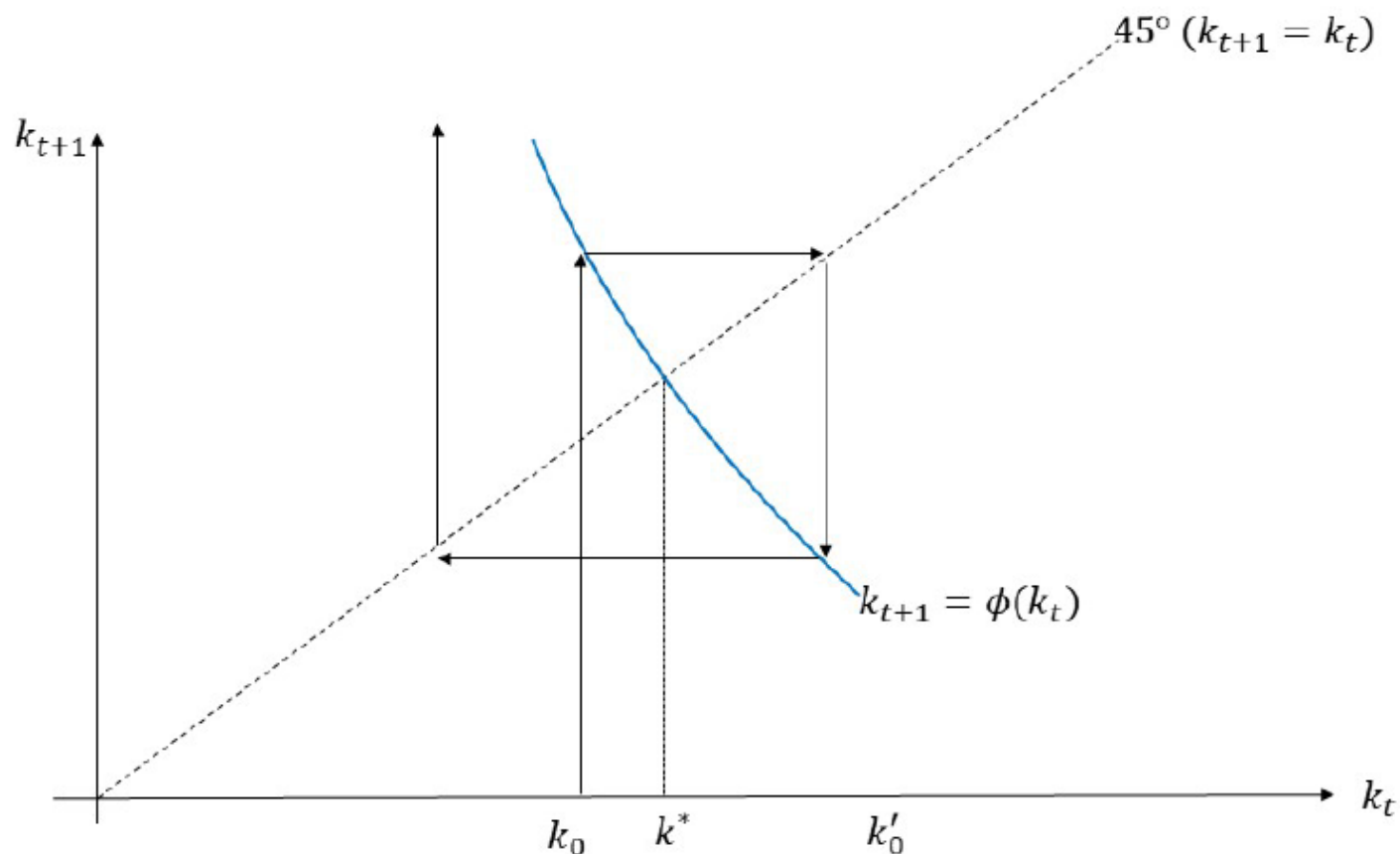
$$0 > \phi'(k^*) > -1$$



Estados estacionários

Figure: Figura 5

$$\phi'(k^*) < -1$$



Regra de Estabilidade Local

- A partir das Figuras 4 e 5, note que agora as relações de estabilidade são resumidas por:

$$\begin{cases} \left. \frac{dk_{t+1}}{dk_t} \right|_{k^*} = \phi'(k^*) > -1 & \Rightarrow \textit{estável} \\ \left. \frac{dk_{t+1}}{dk_t} \right|_{k^*} = \phi'(k^*) < -1 & \Rightarrow \textit{instável} \end{cases}$$

Em que tanto convergência quanto divergência ocorrerão de forma oscilante.

Estabilidade

- Sem restrições sobre as formas funcionais, não há garantia de existência de um único estado estacionário com capital positivo no modelo. Podem tanto existir vários, como nenhum.
- A lei de movimento é dada por:

$$k_{t+1} = \left(\frac{1}{1+n} \right) s(w_t, r_{t+1}) = \left(\frac{1}{1+n} \right) s[f(k_t) - k_t f'(k_t), f'(k_{t+1})]$$

- Diferenciando:

$$dk_{t+1} = \left(\frac{1}{1+n} \right) [-s_w k_t f''(k_t) dk_t + s_r f''(k_{t+1}) dk_{t+1}]$$

- Segue que:

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{-s_w(k_t) f''(k_t) k_t}{1+n - s_t(k_{t+1}) f''(k_{t+1})} \quad (1)$$

De onde não é possível garantir que a expressão acima é positiva, muito menos que se encontra entre zero e um.

Utilidade log, tecnologia Cobb-Douglas

- Neste caso particular, há um único estado estacionário com capital por trabalhador positivo.
- Com $u(c) = \ln(c)$, usando a condição de primeira ordem para o consumidor nascido em t , chega-se a (equivalente a CRRA com $\gamma = 1$):

$$s_t = \frac{w_t}{2 + \rho}$$

Então:

$$k_{t+1} = \left(\frac{1}{1+n} \right) s(w_t, r_{t+1}) = \frac{w_t}{(1+n)(2+\rho)}$$

- Da função de produção Cobb-Douglas, $F(K, N) = K^\alpha N^{\alpha-1}$, segue que $f(k) = F(K, N)/N = k_t^\alpha$. Assim, o salário é dado por:

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) = (1 - \alpha) k_t^\alpha$$

Utilidade log, tecnologia Cobb-Douglas

- A lei de movimento será dada por:

$$k_{t+1} = \phi(k_t) = \left[\frac{1 - \alpha}{(1 + n)(2 + \rho)} \right] k_t^\alpha$$

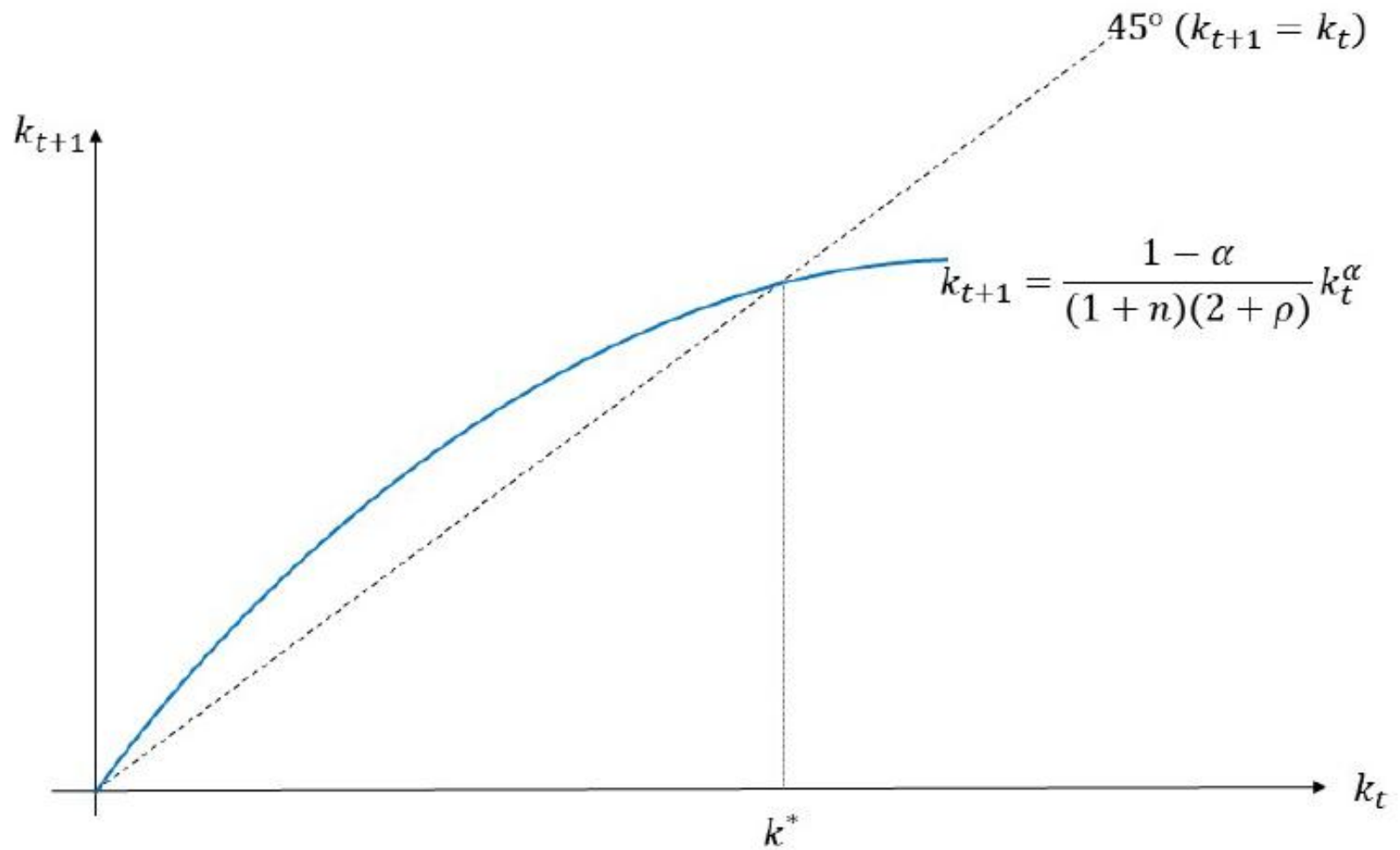
A qual é crescente é côncava. Além disso, $\phi'(0) = \infty$ e $\phi'(\infty) = 0$, o que garante que haja apenas um cruzamento, que ocorre por cima.

- Assim, há apenas um estado estacionário com capital positivo, o qual é estável. Esse estado estacionário é obtido igualando $k_{t+1} = k_t = k^*$ na equação acima, o que resulta em:

$$k^* = \left[\frac{1 - \alpha}{(1 + n)(2 + \rho)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (2)$$

- A Figura 6 resume a dinâmica do capital neste caso. Repare que há um único estado estacionário com capital positivo. Ainda, esse estado estacionário é globalmente estável.

Figure: Figura 6



Utilidade log, tecnologia Cobb-Douglas

- Reescreva a lei de movimento da seguinte forma:

$$k_{t+1} = \left(\frac{1}{1+n} \right) s_t = \left(\frac{1}{1+n} \right) \left(\frac{s_t}{w_t} \right) \left(\frac{w_t}{f(k_t)} \right) f(k_t)$$

► s_t/w_t é a fração da renda do jovem alocada na poupança. É constante e igual a $1/(2 + \rho)$ no caso de utilidade log.

► $w_t/f(k_t)$ é a participação do trabalho na renda da economia (isto é, o *labor share*). É constante e igual a $1 - \alpha$, com tecnologia específica.

- Logo, com essa forma funcional específica, o único componente que influencia a lei de movimento é a função f .

► em outras especificações, tanto s/w como o *labor share* podem variar, afetando o comportamento da lei de movimento.

► Pode mudar de inclinação e até tornar-se convexa ou decrescente, a depender de como esses dois componentes variam com k .

Ineficiência Dinâmica

- No modelo de gerações sobrepostas, o equilíbrio descentralizado não necessariamente corresponderá a um ótimo de Pareto. Há uma falha de mercado que será explorada mais à frente.
- Suponha utilidade log e tecnologia Cobb-Douglas;
- Deve-se calcular o nível de capital da regra de ouro. Para isso, note que podemos escrever a seguinte expressão para o consumo agregado:

$$C_t = N_t c_{1t} + N_{t-1} c_{2t} = F(K_t, N_t) - (K_{t+1} - K_t)$$

Em que N_t representa o número de jovens em t , e N_{t-1} é o número de velhos em t . Dividindo por N_t :

$$\frac{C_t}{N_t} = \frac{N_t c_{1t}}{N_t} + \frac{N_{t-1} c_{2t}}{N_t} = \frac{F(K_t, N_t)}{N_t} - \frac{(K_{t+1} - K_t)}{N_t}$$

Ineficiência Dinâmica

$$c_t = c_{1t} + \frac{N_{t-1}}{N_t} c_{2t} = \frac{F(K_t, N_t)}{N_t} - \left(\frac{K_{t+1}}{N_{t+1}} \frac{N_{t+1}}{N_t} - \frac{K_t}{N_t} \right)$$

$$c_t = c_{1t} + \frac{1}{1+n} c_{2t} = f(k_t) - [(1+n)k_{t+1} - k_t]$$

Ineficiência Dinâmica

- Em estado estacionário:

$$c = f(k) - nk$$

- Observe que maximizar $c = C_t/N_t$ é equivalente a maximizar o consumo *per capita*. Isso porque:

$$Pop_t = N_{t-1} + N_t = \frac{N_t}{(1+n)} + N_t = \left[\frac{1}{(1+n)} + 1 \right] N_t$$

- Desse modo, maximizando a expressão anterior escolhendo o capital ótimo nos dará a regra de ouro:

$$f'(k_g) = n \quad (3)$$

- de (2), sabe-se que $f'(k) = \alpha k^{\alpha-1}$, pode-se chegar a:

$$f'(k^*) = \frac{\alpha}{1-\alpha} (1+n)(2+\rho)$$

Ineficiência Dinâmica

- Se α for suficientemente baixo, é possível que $f'(k^*) < f'(k_g)$, implicando que o capital de estado estacionário será superior ao capital da regra de ouro.

► Ineficiência dinâmica.

- Suponha uma economia em estado estacionário em que de fato o capital esteja acima da regra de ouro. Neste caso, é possível fazer uma realocação em que o nível de consumo será maior para todos os indivíduos da economia em todos os períodos em relação ao consumo do estado estacionário inicial.

► Melhora de Pareto.

- A economia está inicialmente em estado estacionário com $k^* > k_g$. Promova a seguinte mudança:

- Em t_0 , desinvestir $k^* - k_g$ (transformar em consumo).

- De $t_0 + 1$ em diante, manter a economia no estado estacionário com $k = k_g$.

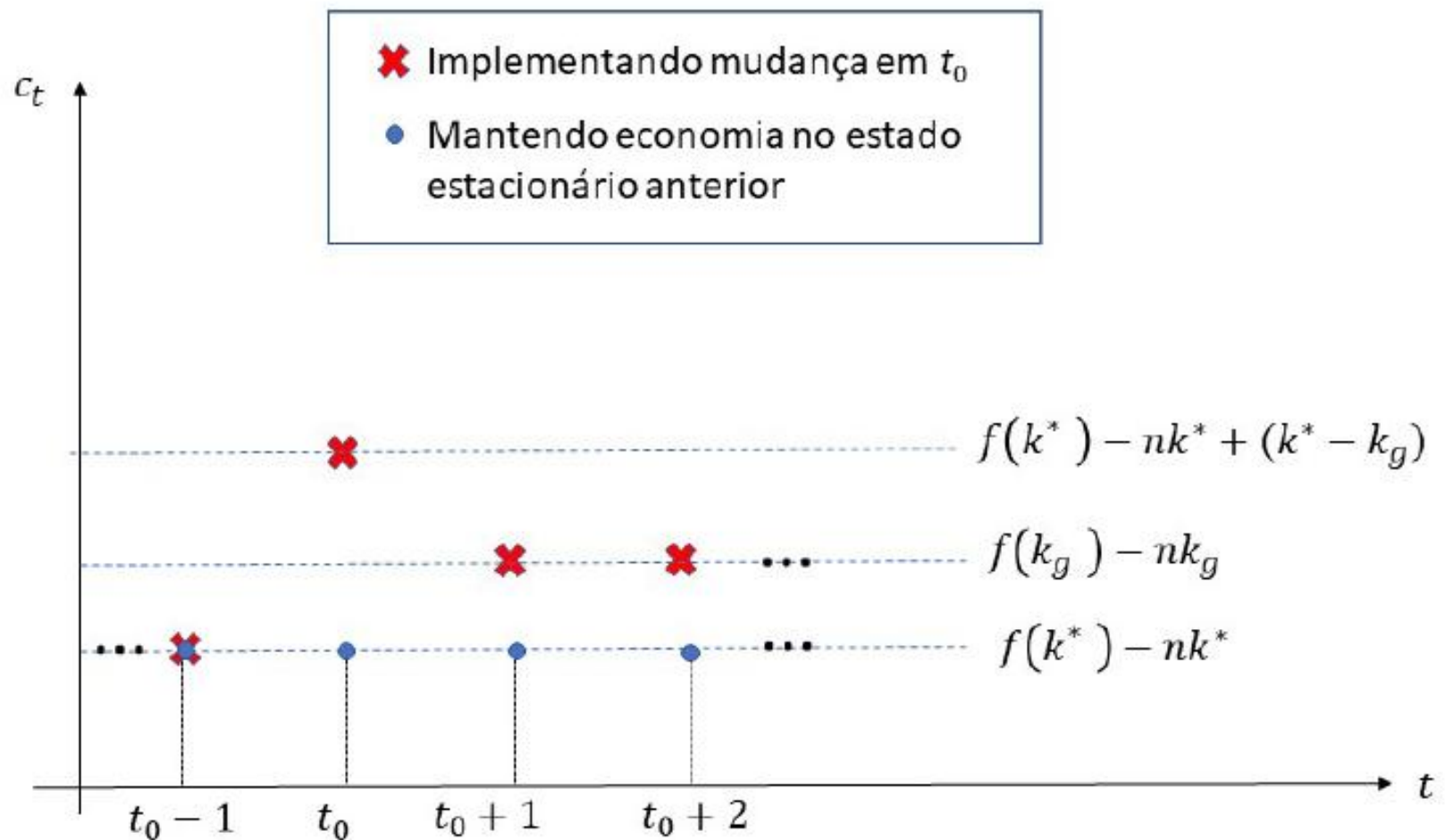
Ineficiência Dinâmica

- Assim, nessa realocação:

$$c_t = \begin{cases} f(k^*) - nk^* + (k^* - k_g) & \text{em } t = t_0 \\ f(k_g) - nk_g & \text{em } t > t_0 \end{cases}$$

- Assim, $c_t > c^* = f(k^*) - nk^*$ para todo $t > t_0$. Ver figura 7.
- Como $c_t = c_{1t} + c_{2t}/(1 + n)$, é possível aumentar o consumo de todas as gerações, corrente e futuras (ou aumentar o consumo de alguma geração, sem reduzir o consumo de nenhuma geração).
- Tem-se, assim, uma possível melhora de Pareto.
- A situação inicial é ineficiente.

Figure: Figura 7



Ineficiência Dinâmica

- A falha de mercado ocorre porque trocas intergeracionais não são possíveis.
- A única maneira de transferir recursos no tempo é acumulando capital, mesmo que a taxa de retorno seja baixa. Considere o seguinte arranjo:
 - ▶ Retira-se 1 unidade de renda do trabalho de cada jovem em t , totalizando N_t unidades.
 - ▶ Distribuem-se esses recursos entre os velhos igualmente, sendo que cada velho receberá: $N_t/N_{t-1} = 1 + n$.
 - ▶ Garante-se que o esquema será mantido.
- A taxa de retorno desse esquema de transferências será:

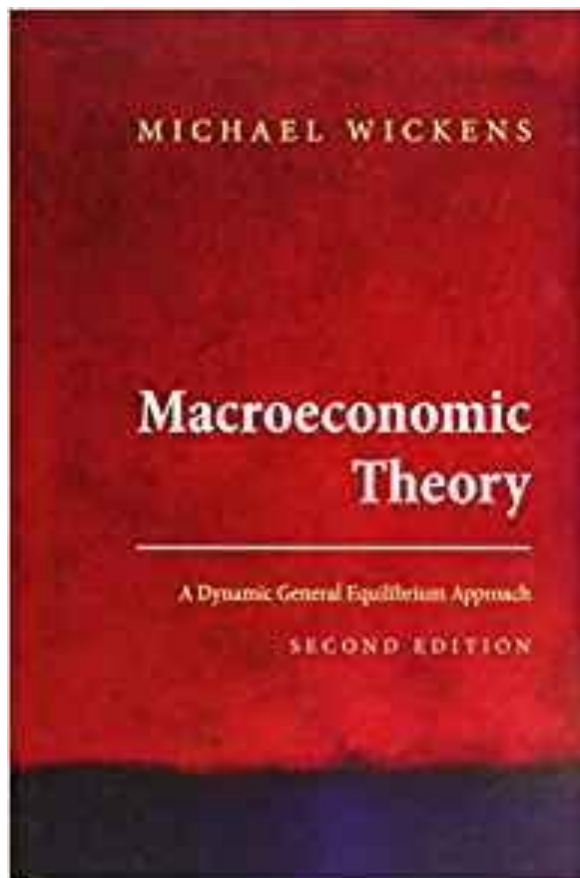
$$\frac{1 + n}{1} - 1 = n > f'(k^*)$$

- Assim, transferências serão mais eficientes do que poupança.

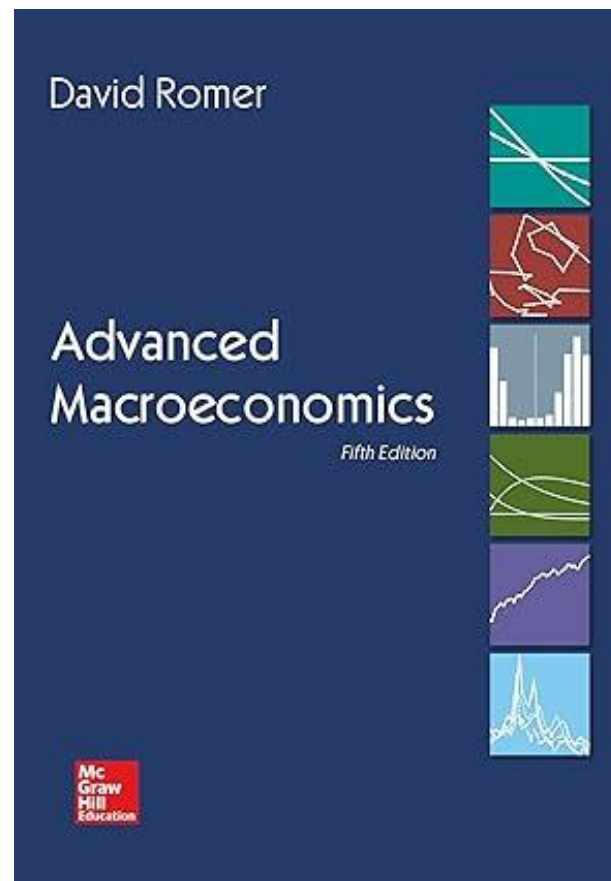
Ineficiência Dinâmica

- Os agentes não conseguem implementar esse arranjo:
 - ▶ Geração nascida em t receberá transferências da geração que nascerá em $t + 1$.
 - ▶ Mas não é possível escrever esse contrato em t porque a geração futura ainda não nasce.
- Assim, a falha de mercado ocorre porque há um mercado faltando.
 - ▶ Trocas entre gerações não são possíveis.

Referências bibliográficas

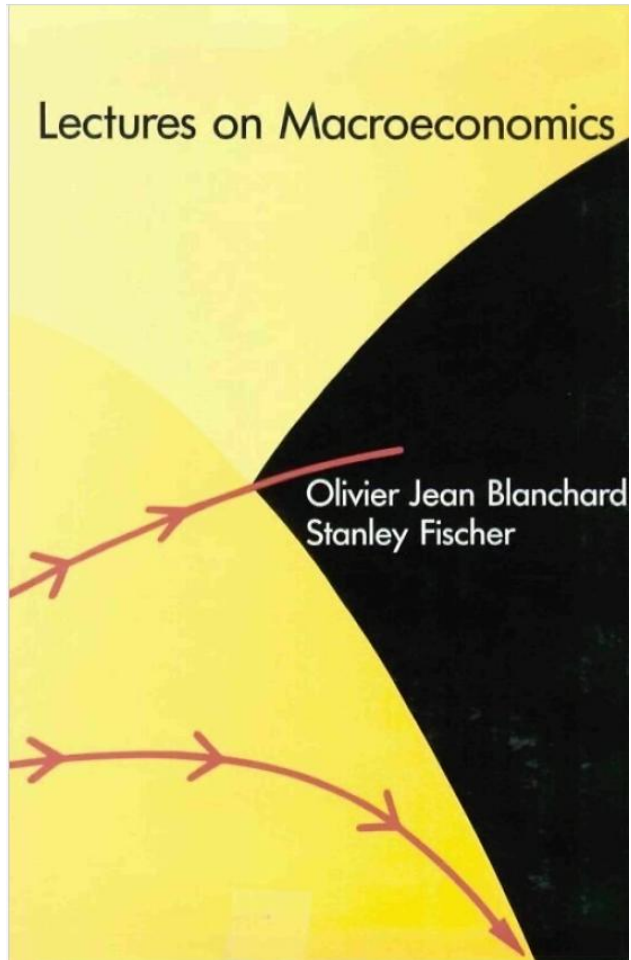


Capítulo 6



Capítulo 2

Referências bibliográficas



Capítulo 3

Referências bibliográficas

BANCO INTERAMERICANO DE DESENVOLVIMENTO.
Treinamento FISLAC. Divisão de Gestão Fiscal. Brasília,
novembro de 2025.

MARTINEZ, T. R. **Overlapping Generation Models.** Nota de
Aula: Macroeconomia. Brasília: Universidade de Brasília,
2026.

RODRIGUES, M. **Curso de Teoria Macroeconômica.**
Universidade de São Paulo, 2021.

Obrigado!

Contato:

PROF. DR. SÉRGIO RICARDO DE BRITO GADELHA

E-mail: sergio.gadelha@idp.edu.br e professor.sergio.Gadelha@gmail.com

Sítio eletrônico: <https://sergiorbgadelha.com.br/>