

Macroeconomia Avançada

Aula 4: Crescimento Econômico de Longo Prazo

Modelo de Solow-Swan

Informativo

Essa nota de aula é um resumo dos principais tópicos constantes nas referências bibliográficas da disciplina Macroeconomia Avançada, lecionada no Programa de Doutorado e Mestrado em Economia do Instituto Brasileiro de Ensino, Desenvolvimento e Pesquisa (IDP).

Eu destaco que essa nota de aula não tem fins comerciais, servindo exclusivamente como material de apoio às aulas dessa disciplina.

Quaisquer erros e omissões são de minha inteira responsabilidade.

Contribuições e considerações podem ser enviadas para:

sergio.gadelha@idp.edu.br ou
professor.sergio.gadelha@gmail.com

Modelando Crescimento Econômico

Até o momento, estudou-se o Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans, cujo equilíbrio de longo prazo era estático.

Mas, agora, deve-se considerar o crescimento econômico de longo prazo.

Quais são as fontes de crescimento econômico?

(1) Acúmulo de fatores de produção:

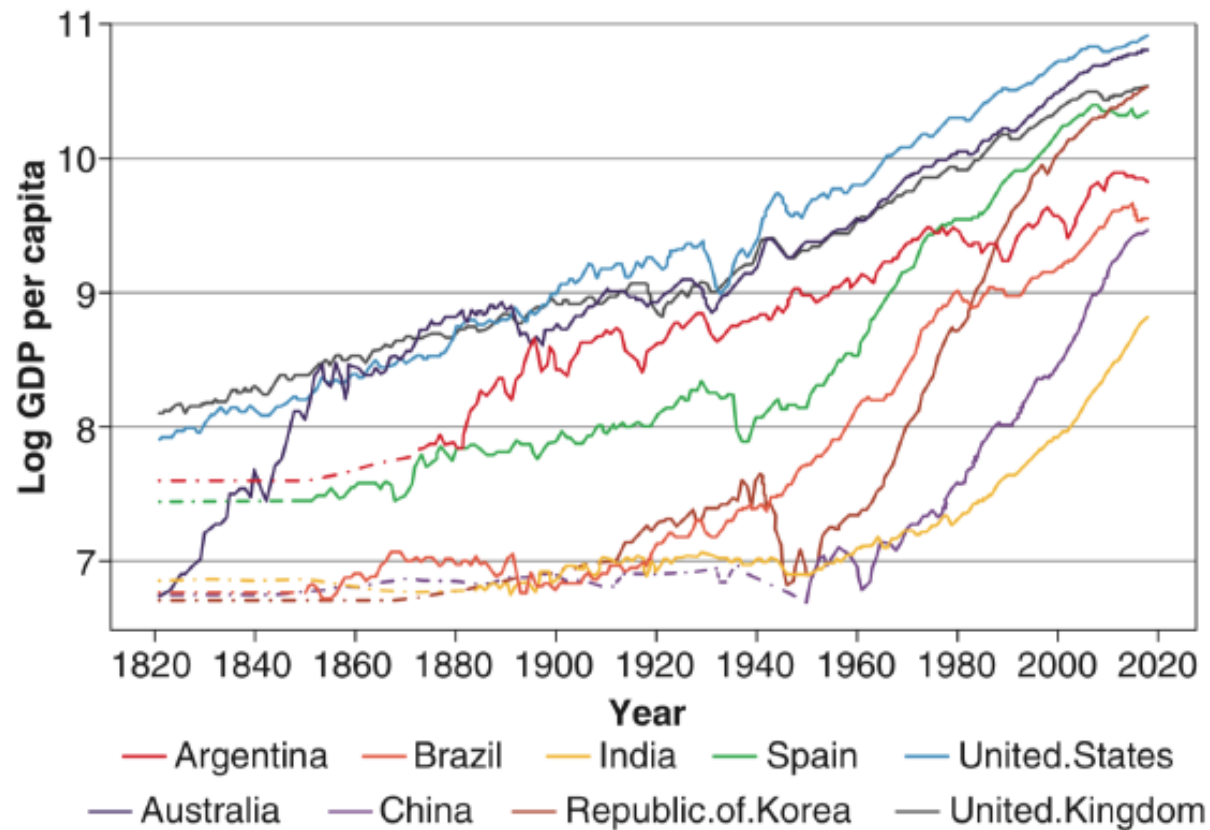
(1.1) Aumento no estoque de capital;

(1.2) Aumento no fator trabalho (crescimento da população, mudanças na taxa de participação e capital humano)

(2) Progresso tecnológico.

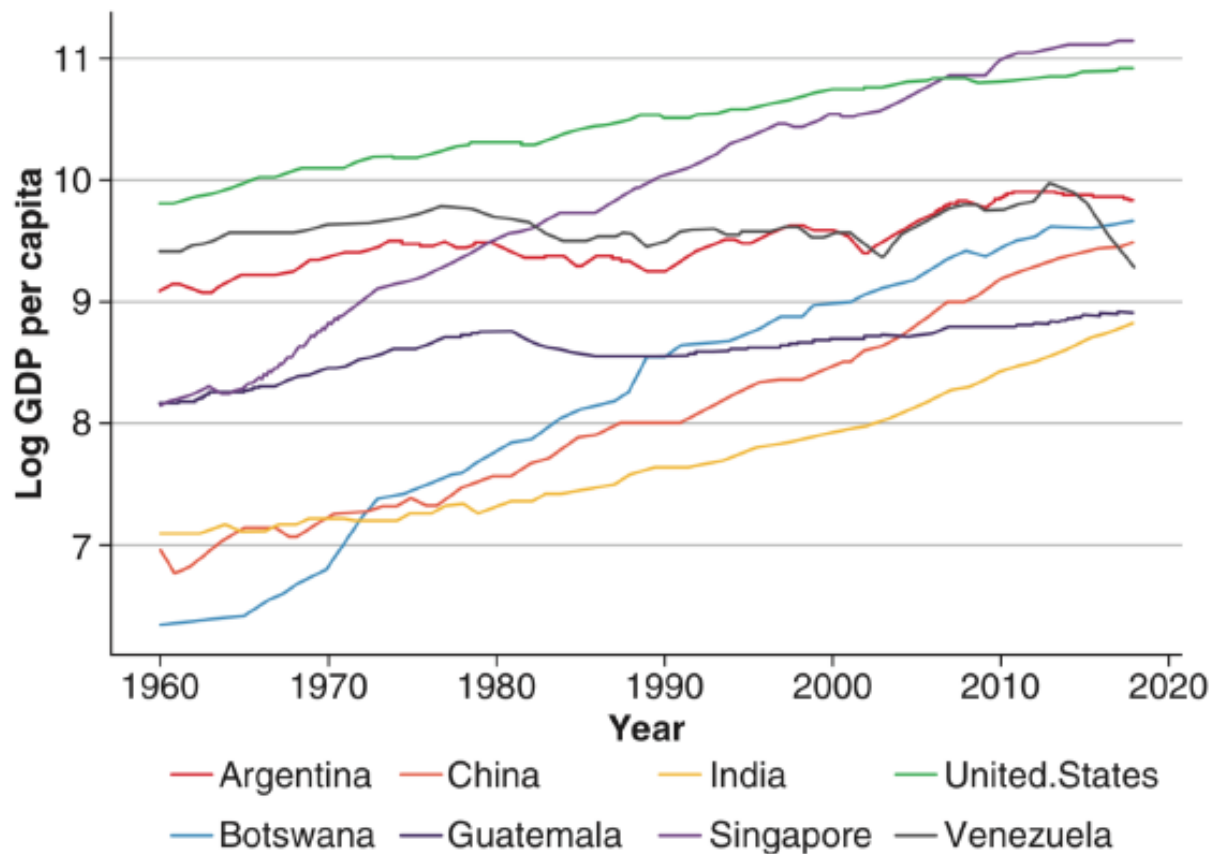
Fatos sobre Crescimento Econômico

Log GDP per capita of selected countries (1820-2018)



Fatos sobre Crescimento Econômico

Log GDP per capita of selected countries (1960-2018)



Fatos sobre Crescimento Econômico

Country	Gross National Income		Gross National Income, PPP	
	billon \$	\$ per capita	billon \$	\$ per capita
Macao	48.8	75610	75.1	117340
Singapore	329.7	58390	515.1	90320
Bermuda	7.6	117740	5.5	86450
Switzerland	736.5	87950	631.3	73620
Germany	3966.1	48600	4770.4	57410
Turkey	748.6	9690	2240.7	26860
Mozambique	15.0	490	39.8	1310
Central African Republic	2.4	520	5.0	1060
Somalia	4.9	320	13.9	900
Burundi	3.0	280	9.1	790

Table 1 *By how much do countries differ in GDP per capita?*

Factor of (almost) 100 between poorest and richest countries

Source: World Development Indicators, 2019

Fatos sobre Crescimento Econômico

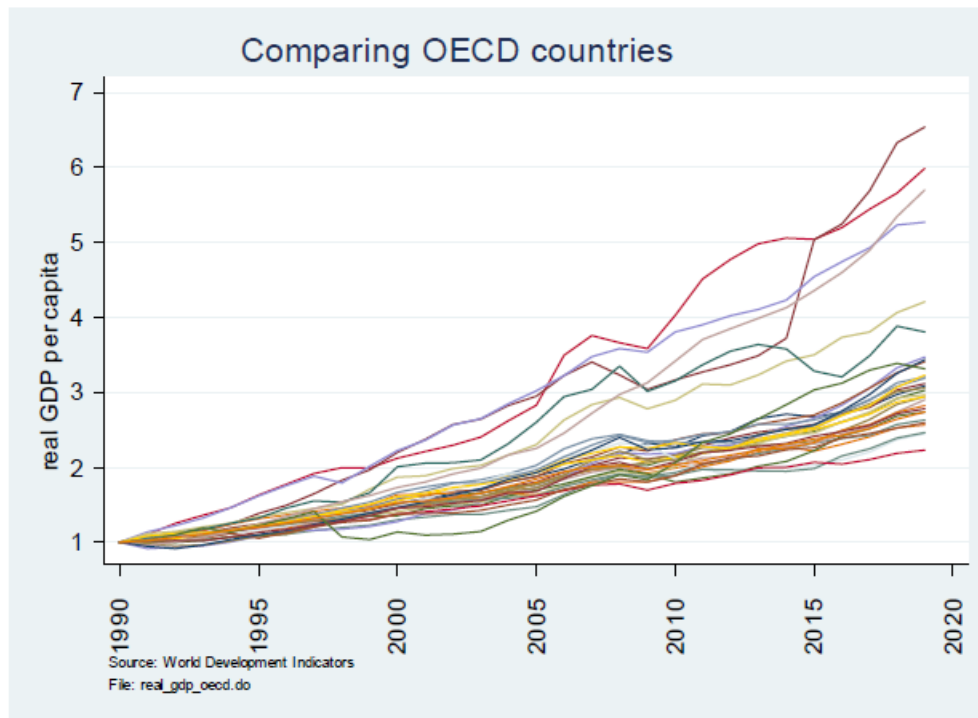


Figure 2 *Development of real GDP per capita in OECD countries (Organisation for Economic Co-operation and Development – www.oecd.org)*

Fatos sobre Crescimento Econômico

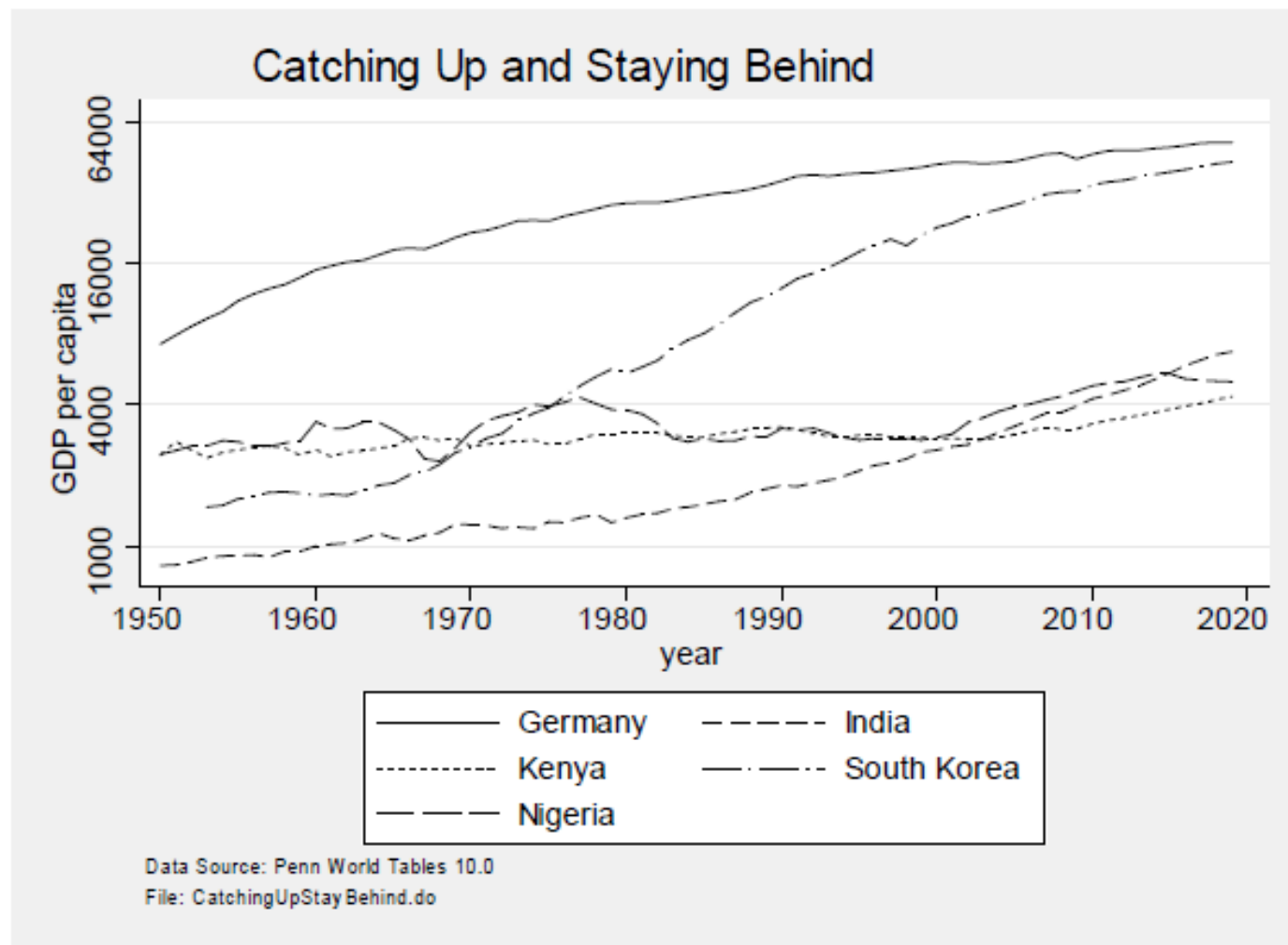


Figure 3 *Catching up and staying behind of some countries*

Modelo de Solow-Swan

Robert Solow (1956) desenvolveu um modelo neoclássico visando identificar os determinantes de crescimento de longo prazo e explicar alguns fatos estilizados sobre as tendências de crescimento em países desenvolvidos. O esquema contábil busca medir os principais fatores de crescimento econômico: a acumulação de capital, o crescimento da força de trabalho e a mudanças tecnológicas.

SOLOW, R. M. A Contribution to the Theory of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics*, 70, p. 65-94, 1956.

_____. Technical Change and the Aggregate Production Function. *Review of Economics and Statistics*, 39, p. 312-320, 1957.

Modelo de Solow-Swan: Premissas e Equações

Crescimento e Desenvolvimento Econômico

Crescimento Econômico de Longo Prazo

Variável	Símbolo	Taxa de Crescimento
População	N_t	n
Capital	K_t	n
Tecnologia	-	μ
Produto	Y_t	-
Consumo	C_t	n
Investimento	I_t	n
Depreciação	-	δ

Modelo de Solow-Swan: **Comportamento das Famílias**

Modelo de Solow-Swan: Famílias

- ▶ A família j possui k_t^j unidades de capital e h_t^j de trabalho.
- ▶ Cada família recebe r_t por cada unidade de capital empregada na produção, e w_t por cada hora trabalhada.
- ▶ A renda da família j é dada por: $r_t k_t^j + w_t h_t^j$.
- ▶ A família j utiliza a renda em consumo (c_t^j) e poupança (s_t^j) .
- ▶ Restrição orçamentária da família j :

$$r_t k_t^j + w_t h_t^j = c_t^j + s_t^j \quad (1)$$

Modelo de Solow-Swan: Famílias

► A cada período, existem N_t famílias, de forma que a restrição orçamentária agregada é expressa por:

$$r_t \sum_{j=1}^{N_t} k_t^j + w_t \sum_{j=1}^{N_t} h_t^j = \sum_{j=1}^{N_t} c_t^j + \sum_{j=1}^{N_t} s_t^j \quad (2)$$

► Suponha que todas as famílias são idênticas: família representativa (agente representativo, residente representativo, dinastia)!

$$r_t N_t k_t + w_t N_t h_t = N_t c_t + N_t s_t \quad (3)$$

► Usando letras maiúsculas para representar variáveis agregadas, obtém-se a seguinte forma para a equação (3):

$$N_t K_t + w_t H_t = C_t + S_t \quad (4)$$

Modelo de Solow-Swan: Famílias

► A partir da contabilidade nacional, sabe-se que o investimento agregado é igual à poupança agregada. Usando esta informação, a equação (4) passa a representar a identidade entre receita e despesa, isto é:

$$\underbrace{r_t K_t + w_t H_t}_{Y_t} = C_t + I_t \quad (5)$$

► A oferta de trabalho é inelástica: $h_t^j = 1, \forall t, j$. Cada família irá ofertar uma unidade de trabalho no tempo.

► **Se toda população ofertar trabalho, nós teremos $H_t = N_t$, do contrário, nós teremos $H_t = L_t$, em que L_t representa a força de trabalho que é igual à mão-de-obra empregada na economia.**

► Cada família poupa uma fração constante da renda, de modo que $S_t = \sigma Y_t$, onde $Y_t = r_t K_t + w_t H_t$.

Modelo de Solow-Swan: **Tecnologia das Firms**

Função de Produção Neoclássica

► A função de produção agregada neoclássica é dada por:

$$Y_t = F(K_t, A_t \times N_t) \quad (1)$$

A produção é função de três insumos:

Estoque de capital (K_t)

Estoque agregado de mão-de-obra (N_t)

Progresso tecnológico, estado da tecnologia ou eficiência do trabalho (A_t).

Função de Produção Neoclássica

► A função de produção depende, basicamente, do capital e do trabalho, mas Solow supôs uma forma especial de mudança tecnológica em que as variações de A causam o mesmo aumento no produto marginal de K e N .

A equação (1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$Y_t = A_t \times F(K_t, N_t) \quad (2)$$

Seguindo notação de Wickens (2012), iremos utilizar letras maiúsculas para valores em nível (ou valores agregados), e letras minúsculas para valores *per capita*.

Função de Produção Neoclássica

A função de produção neoclássica possui as seguintes propriedades (ou hipóteses):

(1) A função de produção é **homogênea de grau 1**, de modo que as firmas exibem **retornos constantes de escala**. Por exemplo, se as firmas dobram os insumos, a produção também é dobrada; se as firmas triplicam os insumos, a produção também é triplicada, e assim por diante:

$$Y_t = F(2K_t, 2N_t) = 2F(K_t, N_t)$$

$$Y_t = F(3K_t, 3N_t) = 3F(K_t, N_t)$$

Assim:

$$\lambda Y_t = F(\lambda K_t, \lambda N_t), \forall \lambda > 0$$

Função de Produção Neoclássica

Com essa propriedade (hipótese), torna-se possível ignorar problemas de organização industrial, tais como: número ótimo de firmas em um mercado competitivo.

Não haverá necessidade de se discutir que existem 10 firmas operando uma máquina cada firma, ou se tem uma firma operando 10 máquinas! O total produzido é o mesmo!

Claro, há uma questão estratégica: um monopolista tem comportamento estratégico diferente de uma empresa no mercado competitivo.

Função de Produção Neoclássica

Outra utilidade importante da hipótese de retornos constantes de escala é tornar possível obter a igualdade entre produto e renda a partir das condições de primeira ordem para maximização de lucros e do Teorema de Euler para funções homogêneas.

Segundo o Teorema de Euler, se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função homogênea de grau κ , então vale que a soma das derivadas parciais será igual a κ vezes as funções ponderadas pelo argumento (x_i) :

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \kappa f$$

Função de Produção Neoclássica

(2) Ambos os fatores de produção são necessários:
 $F(0, N_t) = F(K_t, 0) = 0$, para qualquer K_t, N_t .

(3) Ambos os fatores de produção contribuem ao produto. Assim os produtos marginais do trabalho e do capital serão dados por:

$$PMgK_t = \frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial K_t} = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} > 0$$

$$PMgN_t = \frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial N_t} = \frac{\partial Y_t}{\partial N_t} > 0$$

Função de Produção Neoclássica

(4) A firma possui **produtividade marginal decrescente**, ou seja, F é côncava em ambos os argumentos:

$$\frac{\partial^2 F(K_t, N_t)}{\partial (K_t)^2} = \frac{\partial^2 Y_t}{\partial (K_t)^2} \frac{\partial PM_g K}{\partial k} < 0$$

$$= \frac{\partial f'(K_t/N_t)}{\partial K_t} < 0$$

$$= \frac{1}{N_t} f''(k_t) < 0$$

$$\text{Logo, } f''(k_t) < 0$$

Função de Produção Neoclássica

Rendimentos decrescentes: o acréscimo de produto por conta do acréscimo de um fator de produção é decrescente.

$$\frac{\partial^2 F(K_t, N_t)}{\partial K_t^2} = \frac{\partial^2 Y_t}{\partial K_t^2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 F(K_t, N_t)}{\partial N_t^2} = \frac{\partial^2 Y_t}{\partial N_t^2} < 0$$

Contabilidade do Crescimento

Capital: o produto marginal do capital ($PMgK$) indica o quanto cresce o produto quando o capital aumenta de uma unidade. Quando o capital aumenta em ΔK unidades, o produto varia, aproximadamente, em $\Delta Y = PMgK(\Delta K)$:

$$\Delta Y = PMgK(\Delta K) \Rightarrow PMgK = \frac{\Delta Y}{\Delta K}$$

$$PMgK = F(K + 1, N) - F(K, N)$$

Contabilidade do Crescimento

Trabalho: o produto marginal do trabalho ($PMgN$) mostra o aumento o produto quando o trabalho é acrescido em uma unidade, isto é, quando o trabalho aumenta de ΔN unidades, o produto cresce, aproximadamente, de $\Delta Y = PMgN(\Delta N)$:

$$\Delta Y = PMgN(\Delta N) \Rightarrow PMgN = \frac{\Delta Y}{\Delta N}$$

$$PMgN = F(K, N + 1) - F(K, N)$$

Contabilidade do Crescimento

Capital e Trabalho: o aumento do produto decorre de duas fontes: mais capital e mais trabalho. Podemos dividir este aumento usando os produtos marginais de ambos os insumos:

$$\Delta Y = PMgK(\Delta K) + PMgN(\Delta N) \quad (3)$$

A equação (3) mostra como atribuir o crescimento a cada fator de produção. A equação (3) pode ser convertida da seguinte forma:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \left(\frac{PMgK}{Y} \right) \left(\frac{\Delta K}{K} \right) + \left(\frac{PMgN}{Y} \right) \left(\frac{\Delta N}{N} \right) \quad (4)$$

Contabilidade do Crescimento

Se a função de produção neoclássica apresenta retornos constantes de escala, o teorema de Euler indica que a soma dessas parcelas é igual a um. Assim:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta Y}{Y} - \alpha \frac{\Delta K}{K} - (1 - \alpha) \frac{\Delta L}{L}$$

onde α é a parcela do capital e $(1 - \alpha)$ é a parcela do trabalho. A inclusão de mudanças tecnológicas acrescenta um novo termo à equação que representa o crescimento econômico:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \alpha \frac{\Delta K}{K} + (1 - \alpha) \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta T}{T}$$

Em que $\Delta T/T$ é o resíduo de Solow.

Função de Produção Neoclássica

A condição de otimização de lucros por parte das firmas exige que o valor pago pelo uso de cada fator seja igual à produtividade marginal deste fator. Dessa forma, o salário real (w_t) deverá ser igual à produtividade marginal do trabalho:

$$w_t = \underbrace{\frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial N_t}}_{PMgN_t} = \frac{\partial Y_t}{\partial N_t}$$

A taxa de juros (r_t) deverá ser igual à produtividade marginal do capital:

$$r_t = \underbrace{\frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial K_t}}_{PMgK_t} = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t}$$

Função de Produção Neoclássica

Substituindo estas igualdades na definição de renda, obtém-se o cálculo do PIB pela ótica da renda:

$$Y_t = r_t K_t + w_t N_t = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} K_t + \frac{\partial Y_t}{\partial N_t} N_t = F(K_t, N_t)$$

Função de Produção Neoclássica

(5) Assume-se que a função de produção satisfaz as **Condições de Inada**:

Se $N_t \rightarrow 0$, $PMgN_t \rightarrow \infty$

Se $K_t \rightarrow 0$, $PMgK_t \rightarrow \infty$

$$\lim_{K \rightarrow 0} \left[\frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial K_t} \right] = \lim_{K \rightarrow 0} \left[\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} \right] = \lim_{K \rightarrow 0} PMgK_t \rightarrow \infty$$

$$\lim_{N \rightarrow 0} \left[\frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial N_t} \right] = \lim_{N \rightarrow 0} \left[\frac{\partial Y_t}{\partial N_t} \right] = \lim_{N \rightarrow 0} PMgN_t \rightarrow \infty$$

Função de Produção Neoclássica

Se $N_t \rightarrow \infty$, $PMgN_t \rightarrow 0$

Se $K_t \rightarrow \infty$, $PMgK_t \rightarrow 0$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial K_t} \right] = \lim_{K \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} \right] = \lim_{K \rightarrow \infty} PMgK_t \rightarrow 0$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial N_t} \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial Y_t}{\partial N_t} \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} PMgN_t \rightarrow 0$$

Função de Produção Neoclássica

Se $K_t = 0$ ou $N_t = 0$, então $Y_t = 0$: $F(K_t, 0) = F(0, N_t) = 0$

As condições de Inada implicam que:

→ Se $K_t = 0$, então $k_t = K_t/N_t = 0$ e $y_t = Y_t/N_t = 0$.
Assim, $f(0) = 0$

→ Como $PMgK_t = f'(k)$, então:

$$f'(k) > 0$$

$$f'(0) = \infty$$

$$f'(\infty) = 0$$

Função de Produção Neoclássica

Em resumo:

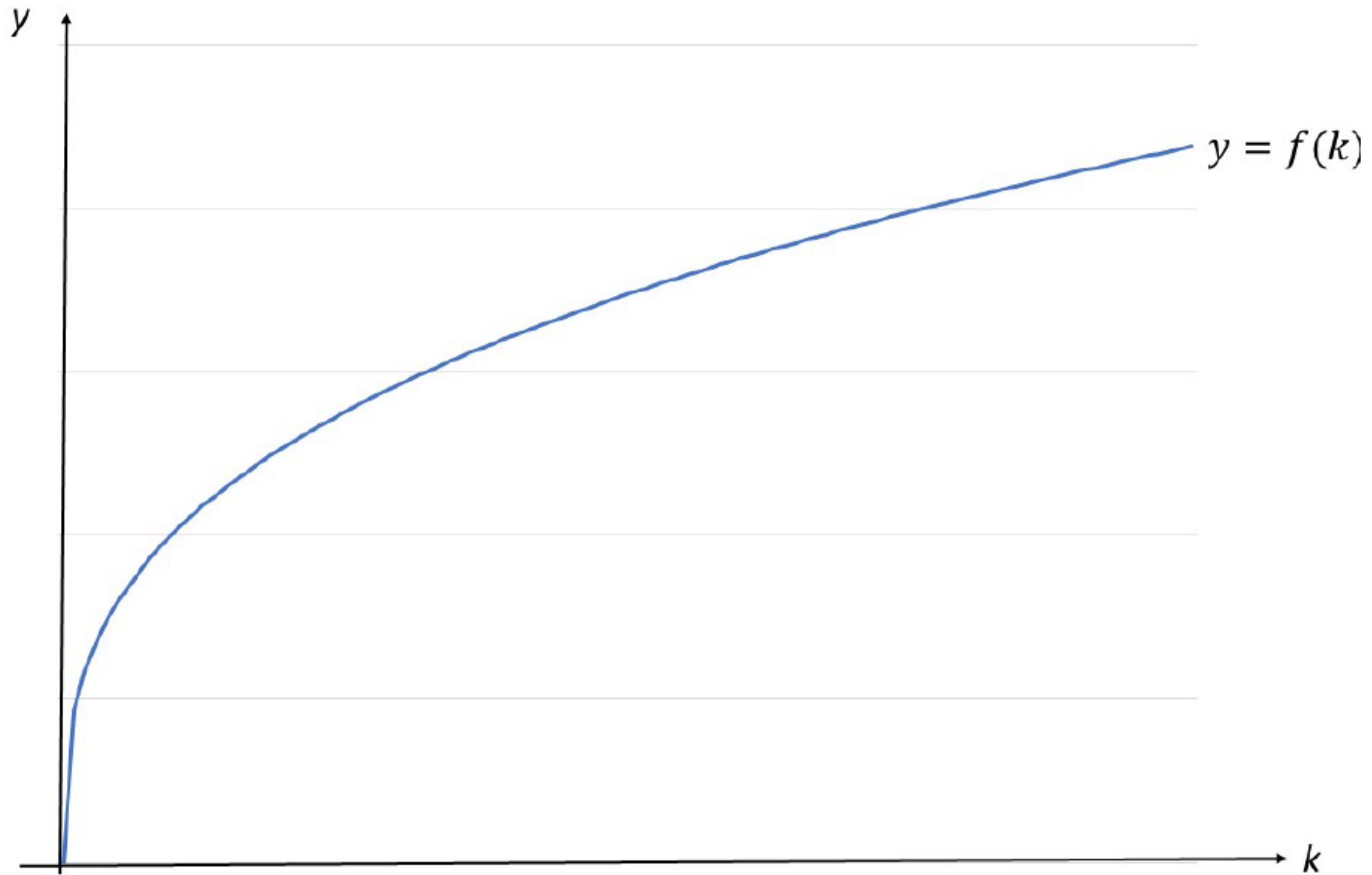
$$f(0) = 0$$

$$f'(k) > 0$$

$$f''(k) < 0$$

$$f'(0) = \infty$$

Função de produção *per capita*



Modelo de Solow-Swan: Equações de Movimento

Equações de Movimento

► Relaciona os valores das variáveis em $t + 1$ com os valores das variáveis em t .

► Considere $H_t = N_t$. A **regra de movimento do trabalho** será dada por: $N_{t+1} = (1 + n)N_t$.

► A **regra de movimento do capital** será dada por:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t \quad (7)$$

► Note que essa regra pode ser reescrita como:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + \underbrace{\sigma Y_t}_{S_t = I_t} = (1 - \delta)K_t + \sigma F(K_t, N_t) \quad (8)$$

Equações de Movimento

► É possível (e desejável) juntar as duas regras de movimento e escrever a regra de movimento do capital por trabalhador, isto é, *per capita* (k_t):

$$\begin{aligned}\frac{K_{t+1}}{N_{t+1}} &= \frac{(1 - \delta)K_t}{\underbrace{N_{t+1}}_{=(1+n)N_t}} + \sigma \frac{1}{\underbrace{N_{t+1}}_{=(1+n)N_t}} F(K_t, N_t) \\ &= \frac{(1 - \delta)K_t}{(1 + n)N_t} + \sigma \frac{1}{(1 + n)N_t} F(K_t, N_t) \\ &= \left(\frac{1}{1 + n} \right) \left\{ \frac{(1 - \delta)K_t}{N_t} + \frac{\sigma}{N_t} F(K_t, N_t) \right\} \\ &= \left(\frac{1}{1 + n} \right) \left\{ \frac{(1 - \delta)K_t}{N_t} + \sigma F\left(\frac{K_t}{N_t}, \frac{N_t}{N_t} \right) \right\}\end{aligned}$$

Equações de Movimento

► Definindo $f(k_t) = F(K_t, 1)$, obtém-se:

$$(1 + n)k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + \sigma f(k_t) \quad (9)$$

► Produto por trabalhador:

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{Y_t}{N_t} = \frac{F(K_t, N_t)}{N_t} = F\left(\frac{K_t}{N_t}, \frac{N_t}{N_t}\right) = F(k_t, 1) \\ &= f(k_t) \end{aligned} \quad (10)$$

Em que:

y_t é o produto por trabalhador;

k_t é o estoque de capital por trabalhador

Equação de Movimento

Acumulação de capital:

- ▶ Capital aumenta ao longo do tempo com investimento;
- ▶ Capital diminui ao longo do tempo por conta da depreciação.

$$\Delta K_{t+1} = I_t - \delta K_t \text{ ou } \dot{K}_t = I_t - \delta K_t$$

$\delta \in (0,1)$: taxa de depreciação (exógena)

ΔK_{t+1} ou $\dot{K}_t$: variação do estoque de capital entre dois períodos (por unidade de tempo):

Equação de Movimento

$$\dot{K}_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{K_{t+\Delta t} - K_t}{\Delta t} = \frac{dK_t}{dt}$$

$$\underbrace{K_{t+1} - K_t}_{\Delta K_{t+1}} = I_t - \delta K_t \Rightarrow K_{t+1} = I_t + K_t - \delta K_t \Rightarrow$$

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t$$

Equação de Movimento

A população (e número de trabalhadores) cresce à taxa exógena n . Como $\Delta N_{t+1}/N_t = n$, então:

$$N_t = (1 + n)^t N_0$$

Alternativamente:

$$\frac{\dot{N}_t}{N_t} = n$$

Produção

► Juros e Salários:

$$Y_t = F(K_t, N_t) = N_t f\left(\frac{K_t}{N_t}\right)$$

O produto marginal do capital pode ser expresso por:

$$\begin{aligned} PMgK_t \\ = \frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial K_t} &= \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = N_t f'(k_t) \left(\frac{1}{N_t}\right) = f'(k_t) \end{aligned}$$

De forma que $r_t = f'(k_t)$. De forma semelhante, é possível mostrar que $w_t = f(k_t) - f'(k_t)k_t$.

Poupança e Consumo *per capita*

► Poupança *per capita*:

$$s_t = \frac{S_t}{N_t} = \sigma \frac{Y_t}{N_t} = \sigma y_t \quad (11)$$

► Consumo *per capita*:

$$\begin{aligned} c_t &= \frac{C_t}{N_t} = \frac{Y_t - S_t}{N_t} = \frac{Y_t}{N_t} - \frac{S_t}{N_t} = y_t - \sigma y_t \\ &= (1 - \sigma)y_t \end{aligned} \quad (12)$$

Exemplo: Função de Produção Cobb-Douglas

Função de Produção Cobb-Douglas

$$Y_t = A_t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha} \Rightarrow Y_t = (1 + \mu)^t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha}$$

Em que: $A_0 = 1 \Rightarrow A_t = A_0(1 + \mu)^t$ é a produtividade total dos fatores.

Seguindo notação de Wickens (2012), iremos utilizar letras maiúsculas para valores em nível, e letras minúsculas para valores *per capita*.

Como a função de produção é homogênea de grau 1, pode-se reescrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{Y_t}{N_t} = (1 + \mu)^t \left(\frac{K_t}{N_t} \right)^\alpha \left(\frac{N_t}{N_t} \right)^{1-\alpha} \Rightarrow y_t = (1 + \mu)^t k_t^\alpha$$

Função de Produção Cobb-Douglas

Em termos *per capita* (ou por trabalhador):

$$y_t = \frac{Y_t}{N_t} = \frac{A_t K_t^\alpha \overset{\text{red}}{N_t^{1-\alpha}}}{\overset{\text{red}}{N_t}} = A_t \left(\frac{K_t^\alpha}{N_t} \underbrace{\frac{\overset{\text{red}}{N_t^{1-\alpha}}}{\overset{\text{red}}{N_t}}}_{=1} \right) = A_t \left(\frac{K_t^\alpha}{N_t} \right)$$

$$\Rightarrow y_t = A_t k_t^\alpha$$

Retornos constantes de escala:

$$\begin{aligned} F(K_t, N_t) &= A_t (\overset{\text{red}}{\lambda K_t})^\alpha (\overset{\text{red}}{\lambda N_t})^{1-\alpha} = A_t \overset{\text{red}}{\lambda}^\alpha \overset{\text{red}}{\lambda}^{1-\alpha} K_t^\alpha N_t^{1-\alpha} \\ &= \overset{\text{red}}{\lambda}^{\alpha+1-\alpha} A_t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha} = \overset{\text{red}}{\lambda} A_t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha} = \overset{\text{red}}{\lambda} F(K_t, N_t) \end{aligned}$$

Função de Produção Cobb-Douglas

Produto marginal do capital:

$$\frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial K_t} = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = PMgK_t = A_t \alpha K_t^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha}$$

Em termos *per capita*:

$$= A_t \alpha \left(\frac{K_t^{\alpha-1}}{N_t} \right) \underbrace{\left(\frac{N_t^{1-\alpha}}{N_t} \right)}_{=1} = A_t \alpha k^{\alpha-1}$$

Positivo, decrescente em K_t , pois $\alpha - 1 < 0$

$PMgK_t \rightarrow 0$ quando $K_t \rightarrow \infty$

$PMgK_t \rightarrow \infty$ quando $K_t \rightarrow 0$

Função de Produção Cobb-Douglas

Produto marginal do Trabalho:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial N_t} &= \frac{\partial Y_t}{\partial N_t} = PMgN_t = A_t(1 - \alpha)K_t^\alpha N_t^{1-\alpha-1} \\ &= A_t(1 - \alpha)K_t^\alpha N_t^{-\alpha}\end{aligned}$$

Em termos *per capita*:

$$= A_t(1 - \alpha) \frac{K_t^\alpha}{N_t} \underbrace{\frac{N_t^{-\alpha}}{N_t}}_{=1} = A_t(1 - \alpha)K_t^\alpha$$

Positivo, decrescente em N_t :

$$PMgN_t \rightarrow 0 \text{ quando } N_t \rightarrow \infty$$

$$PMgN_t \rightarrow \infty \text{ quando } N_t \rightarrow 0$$

Modelo de Solow-Swan: **Restrição de Recursos**

Restrição

Assim como no Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans, tem-se as seguintes relações:

Economia Fechada e sem Governo:

$$Y_t = C_t + I_t = F(K, N)$$

Taxa de Poupança

A população poupa uma fração constante (s) da renda:

$$s_t = s = 1 - \frac{C_t/N_t}{Y_t/N_t} = 1 - \frac{c_t}{y_t} \quad (10)$$

$$\frac{Y_t - C_t}{Y_t} = \frac{S_t}{Y_t} = s$$

Se a taxa de poupança é constante, então a taxa de investimento também é constante:

$$s_t = \frac{I_t}{Y_t} = i_t \quad (11)$$

$$\underbrace{Y_t - C_t}_{S_t} = I_t \Rightarrow \frac{\bar{S}_t}{Y_t} = \frac{\bar{I}_t}{Y_t}$$

Taxa de Crescimento do Capital

A taxa de crescimento do capital é dada por:

$$\frac{\Delta K_{t+1}}{K_t} = \frac{I_t}{K_t} - \delta \frac{K_t}{K_t} \Rightarrow \frac{\Delta K_{t+1}}{K_t} = \frac{I_t}{K_t} - \delta$$

$$= \frac{I_t/Y_t}{K_t/Y_t} - \delta$$

$$= s \frac{Y_t/N_t}{K_t/N_t} - \delta$$

$$= s \frac{y_t}{k_t} - \delta$$

Taxa de Crescimento do Capital *per capita*

A taxa de crescimento do capital *per capita* é dada por:

$$\frac{\Delta k_{t+1}}{k_t} = \frac{\Delta K_{t+1}}{K_t} - \frac{\Delta N_{t+1}}{N_t} \Rightarrow \frac{\Delta k_{t+1}}{k_t} = s \frac{y_t}{k_t} - (\delta + n)$$

E, assim, tem-se que:

$$\Delta k_{t+1} = sy_t - (\delta + n)k_t$$

Cálculo alternativo

Lembrando que $k_t = K_t/N_t$ e $y_t = Y_t/N_t = f(k_t)$

Dividindo a equação de acumulação de capital por N_t :

$$\dot{K}_t = sY_t - \delta K_t$$

$$\frac{\dot{K}_t}{N_t} = s \frac{Y_t}{N_t} - \delta \frac{K_t}{N_t} \Rightarrow \dot{k}_t = sf(k_t) - \delta k_t \quad (*)$$

Note que:

Cálculo alternativo

$$\dot{k}_t = \frac{d(K_t/N_t)}{dt} = \frac{\dot{K}_t N_t - K_t \dot{N}_t}{N_t^2} = \frac{\dot{K}_t}{N_t} - \frac{K_t}{N_t} \frac{\dot{N}_t}{N_t} = \frac{\dot{K}_t}{N_t} - nk_t$$

Logo:

$$\frac{\dot{K}_t}{N_t} = \dot{k}_t + nk_t \quad (**)$$

Cálculo alternativo

Combinando (*) e (**), teremos:

$$\dot{k}_t = sf(k_t) - \delta k_t \quad (*)$$

$$\frac{\dot{K}_t}{N_t} = \dot{k}_t + nk_t \quad (**)$$

$$sf(k_t) - \delta k_t = \dot{k}_t + nk_t$$

Pode-se então obter a **lei de movimento do capital por trabalhador** ou **lei de movimento do capital *per capita***:

Cálculo alternativo

$$sf(k_t) - \delta k_t = \dot{k}_t + nk_t$$

$$\dot{k}_t = sf(k_t) - \delta k_t - nk_t$$

$$\dot{k}_t = sf(k_t) - (\delta + n)k_t$$

Com base nessa equação acima, para um dado estoque de capital por trabalhador inicial k_0 , é possível obter toda a trajetória futura de k_t e das demais variáveis endógenas do modelo.

Modelo de Solow-Swan: Estado Estacionário

Modelo de Solow-Swan: Estado Estacionário

Definição: uma economia se encontra no **estado estacionário** quando todas as suas variáveis (estoque de capital, produto, consumo, investimento e poupança) assumirem valores constantes no tempo.

► Encontrar o estado estacionário equivale a encontrar os pontos em que $k_{t+1} = k_t = k_{ss}$.

► Para determinar o estado estacionário, é válido escrever a equação (9) da seguinte forma:

$$k_{t+1} = \frac{(1 - \delta)k_t + sf(k_t)}{1 + n} = g(k_t) \quad (13)$$

► Dessa forma, encontrar um estado estacionário é equivalente a determinar um ponto fixo da função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Modelo de Solow-Swan: Estado Estacionário

- ▶ Dessa forma, encontrar um estado estacionário é equivalente a determinar um ponto fixo da função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- ▶ Encontrar um ponto fixo para (13) é equivalente a resolver a equação não-linear:

$$(n + \delta)k_t - sf(k_t) = 0 \quad (14)$$

Modelo de Solow-Swan: Caminho de Crescimento Equilibrado

Caminho de Crescimento Equilibrado

► Considere uma economia que se encontra no estado estacionário, com $k = k_{ss}$ e, portanto, $y = y_{ss}$. É possível obter o produto dessa economia por meio de uma multiplicação simples: $Y_t = N_t y^*$. Nota-se que Y_t cresce a uma taxa igual a n , que é a taxa de crescimento da população.

► A implicação mais imediata desse resultado é que, quando se trata com as variáveis propriamente ditas, ao invés da variável em termos *per capita*, não é possível caracterizar um estado estacionário, exatamente por esta razão que é apropriado resolver o modelo em termos *per capita*.

Caminho de Crescimento Equilibrado

► Como todas as variáveis correspondem ao valor da variável *per capita* multiplicado pela população, é possível usar o argumento acima para concluir que o consumo, o investimento e o estoque de capital crescem à taxa n .

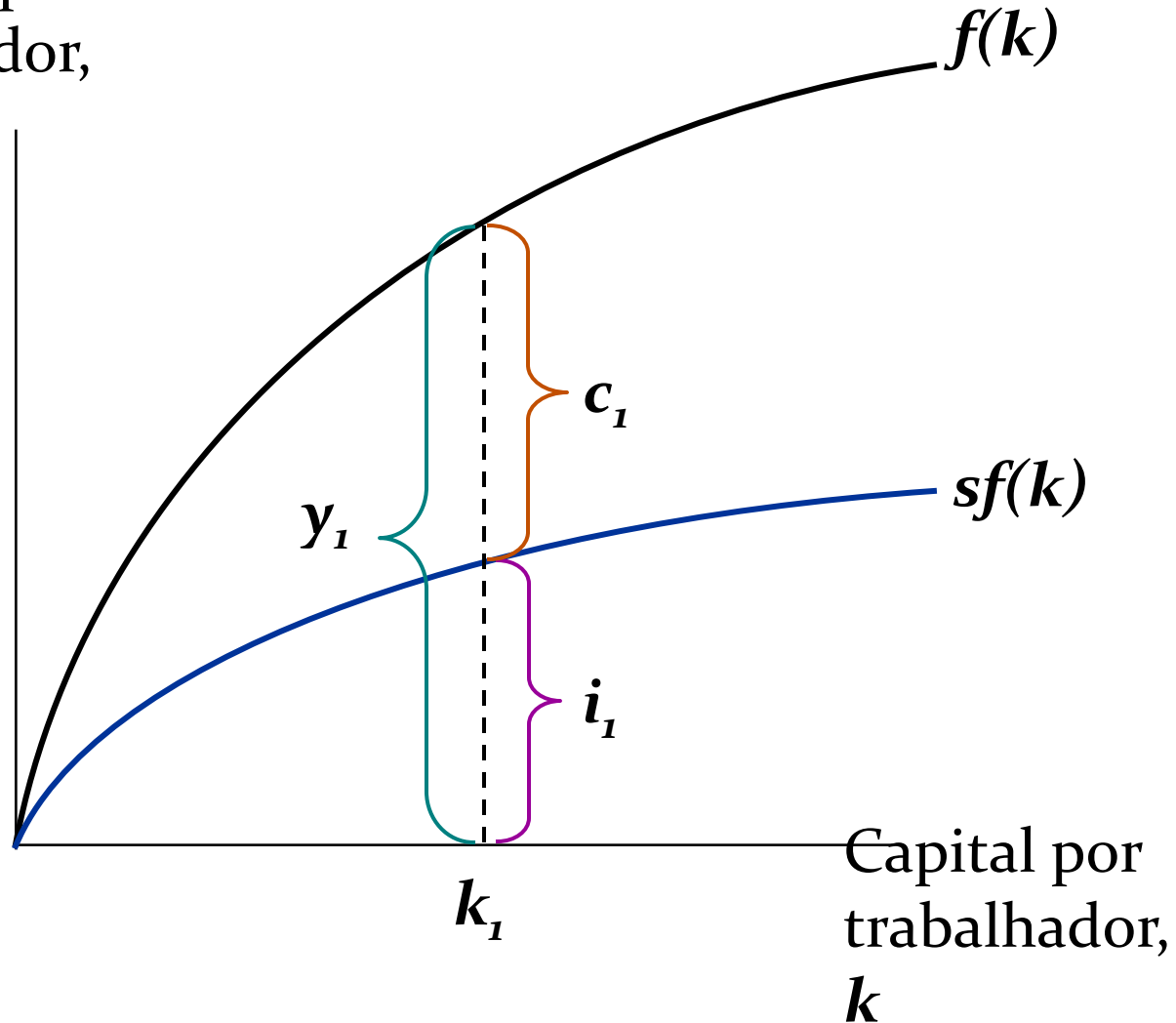
Caminho de Crescimento Equilibrado

► Definição: uma economia se encontra em um **caminho de crescimento equilibrado** quando todas as variáveis crescem à uma taxa constante.

**Modelo de Solow-Swan sem Crescimento
Populacional e sem Progresso Tecnológico: δk**

Produto, Consumo e Investimento

Produto por
trabalhador,
 y

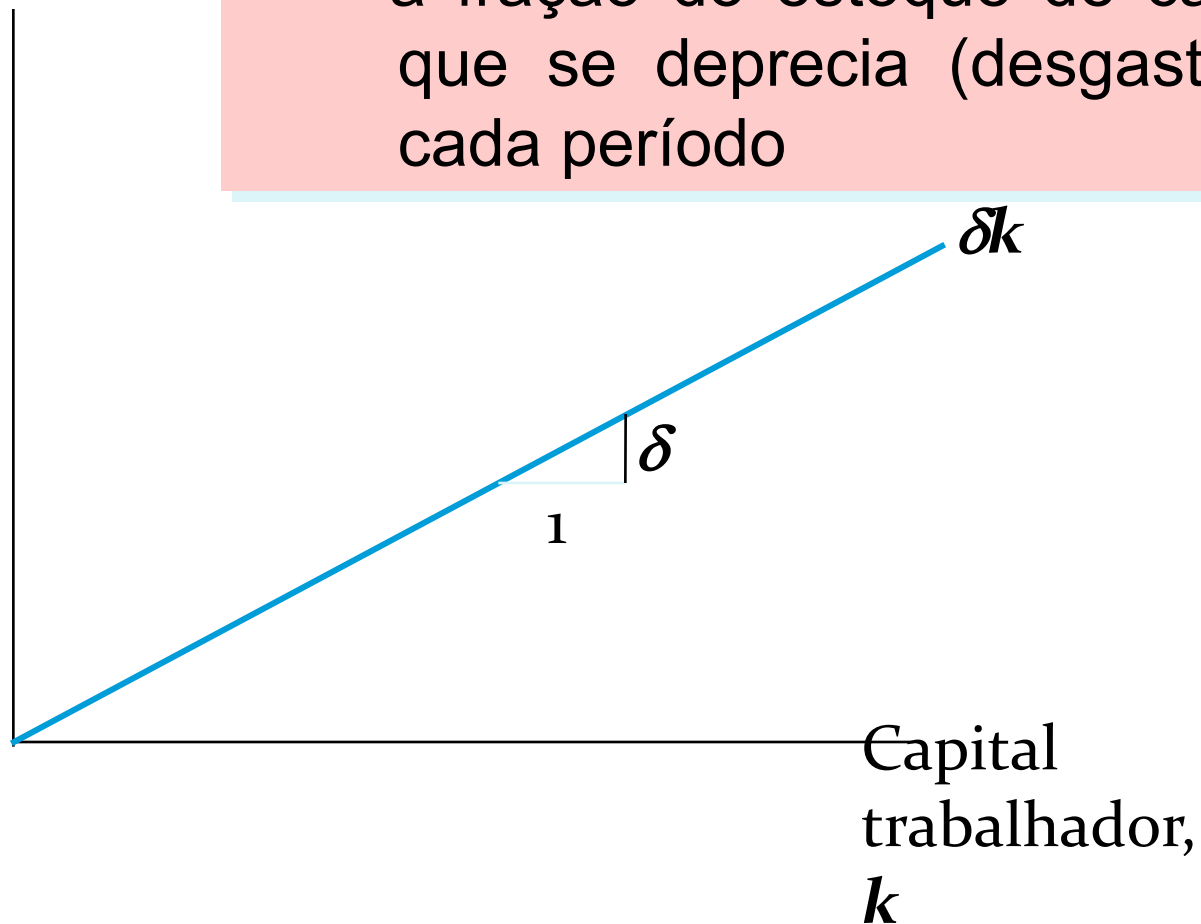


Depreciação

δ = taxa de depreciação

= a fração do estoque de capital que se deprecia (desgasta) a cada período

Depreciação por
trabalhador, δk



Acumulação de Capital

Ideia básica: o investimento aumenta o estoque de capital, enquanto a depreciação o diminui.

$$\begin{array}{rcl} \text{Mudança no est. capital} & = & \text{investimento} - \text{depreciação} \\ \Delta k & = & i - \delta k \end{array}$$

Uma vez que $i = sf(k)$, torna-se:

$$\Delta k = sf(k) - \delta k$$

Equação de Movimento do Capital

$$\Delta k = sf(k) - \delta k$$

- Equação central do modelo de Solow-Swan
- Determina o comportamento do capital ao longo do tempo que, por sua vez, determina o comportamento de todas as outras variáveis endógenas porque elas dependem de k . *Por exemplo:*

renda per capita: $y = f(k)$

consumo per capita: $c = (1-s)f(k)$

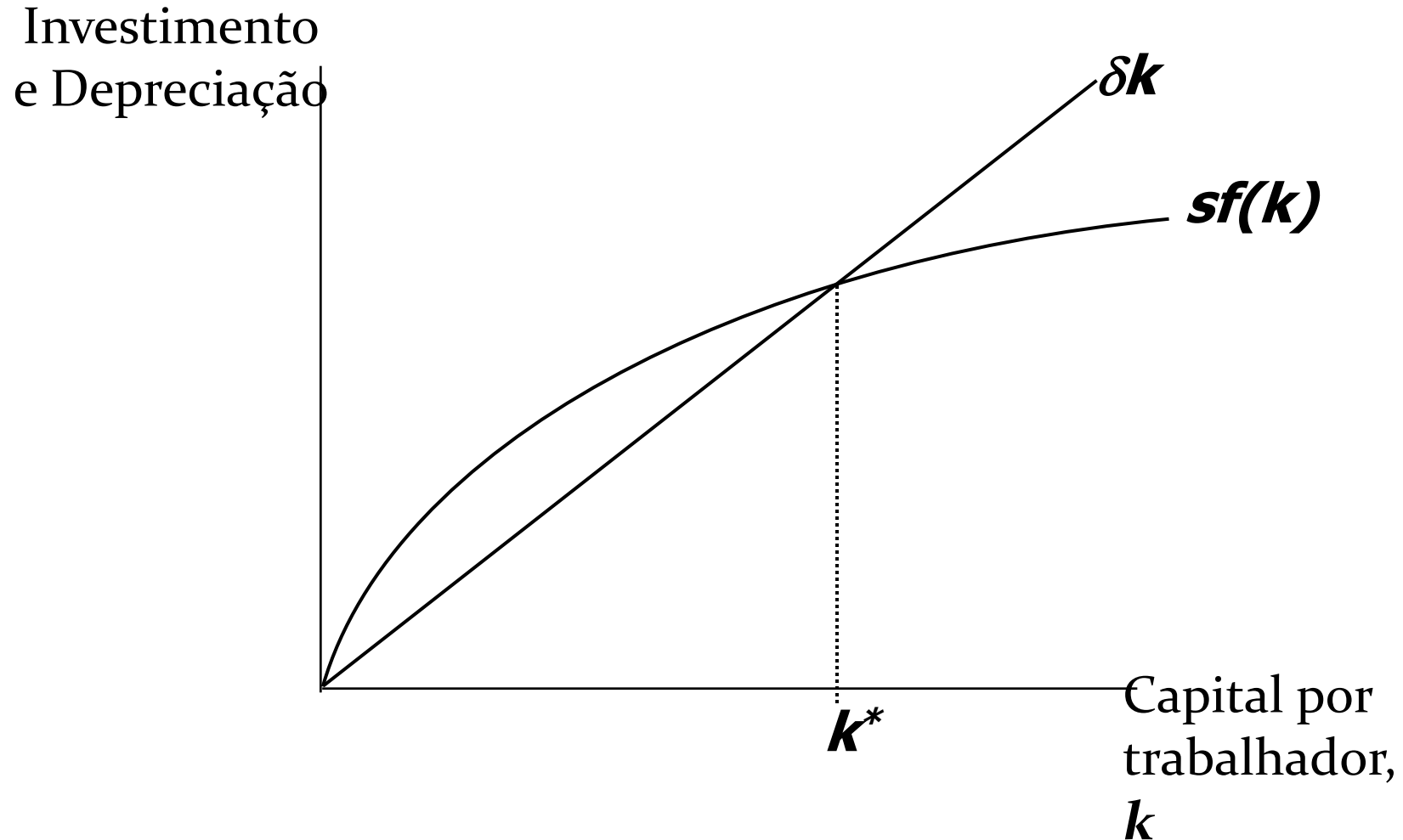
Estado Estacionário

$$\Delta k = sf(k) - \delta k$$

Se o investimento é suficiente para cobrir a depreciação [$sf(k) = \delta k$], então o capital per capita irá permanecer constante: $\Delta k = 0$.

Essa situação ocorre para um valor de k , denotado k^* , chamado de o **estoque de capital no estado estacionário**.

Estado Estacionário



Movendo-se em direção ao estado estacionário

$$\Delta k = sf(k) - \delta k$$

Investimento
e Depreciação

δk

$sf(k)$

investimento

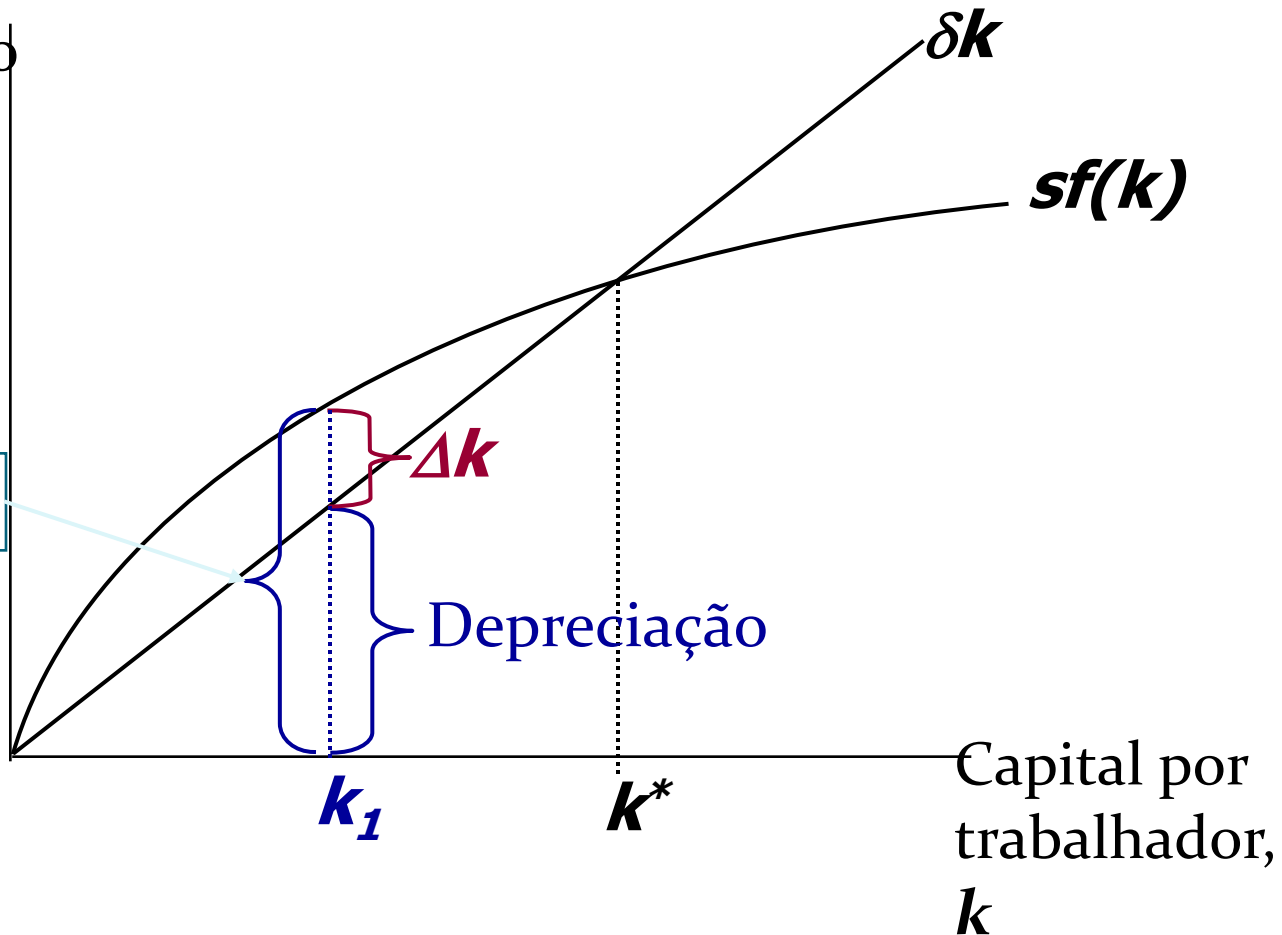
Δk

Depreciação

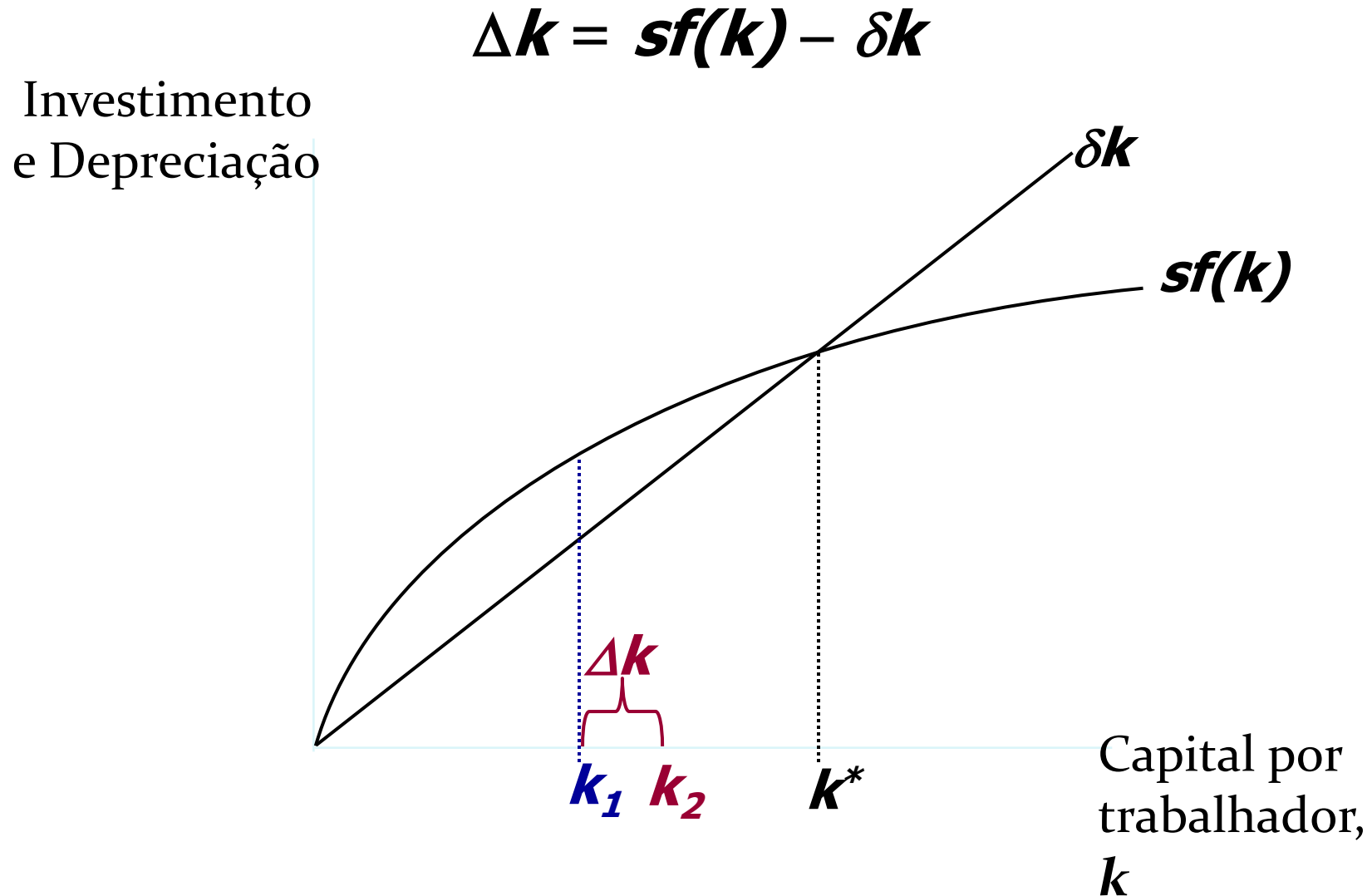
k_1

k^*

Capital por
trabalhador,
 k



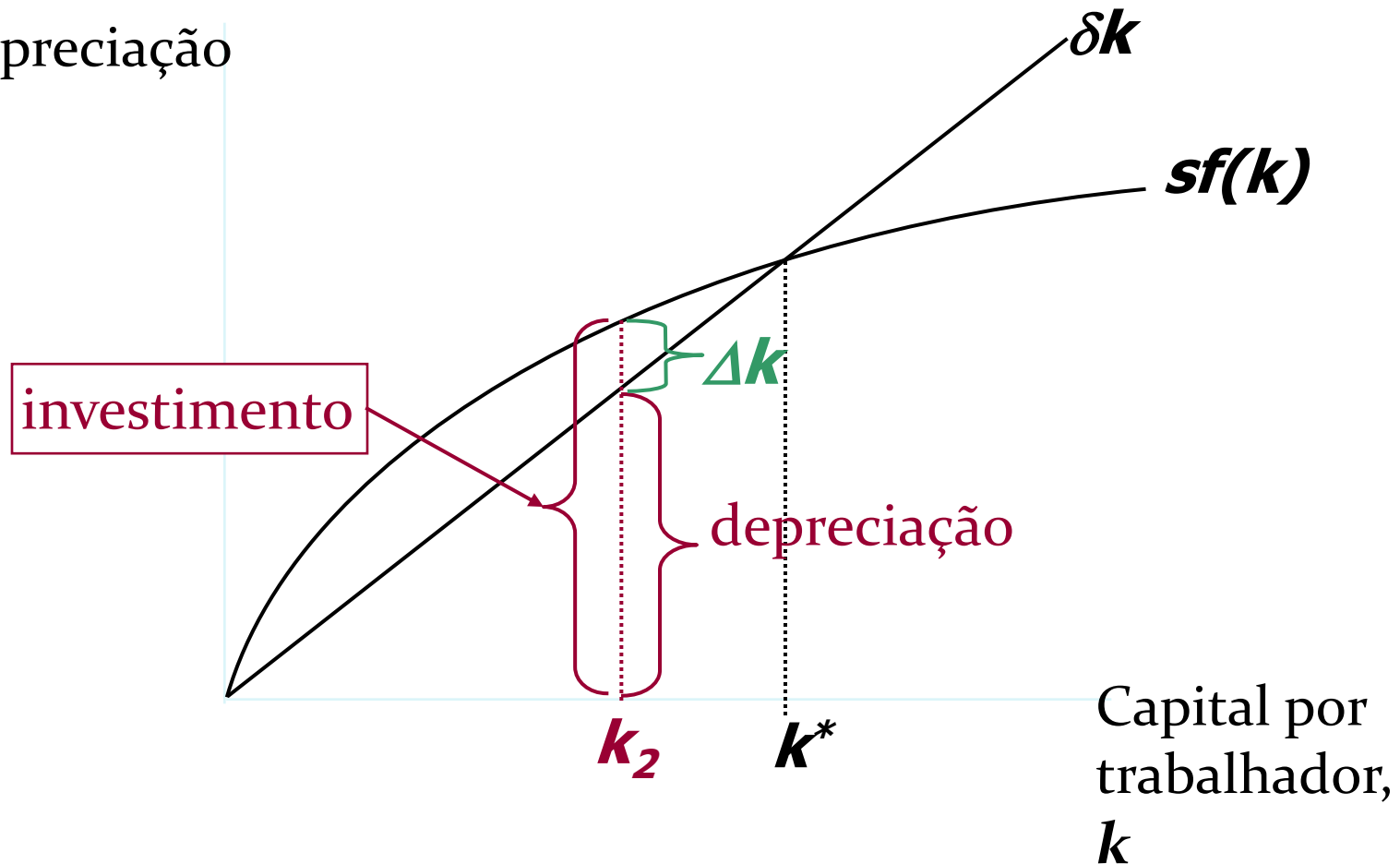
Movendo-se em direção ao estado estacionário



Movendo-se em direção ao estado estacionário

$$\Delta k = sf(k) - \delta k$$

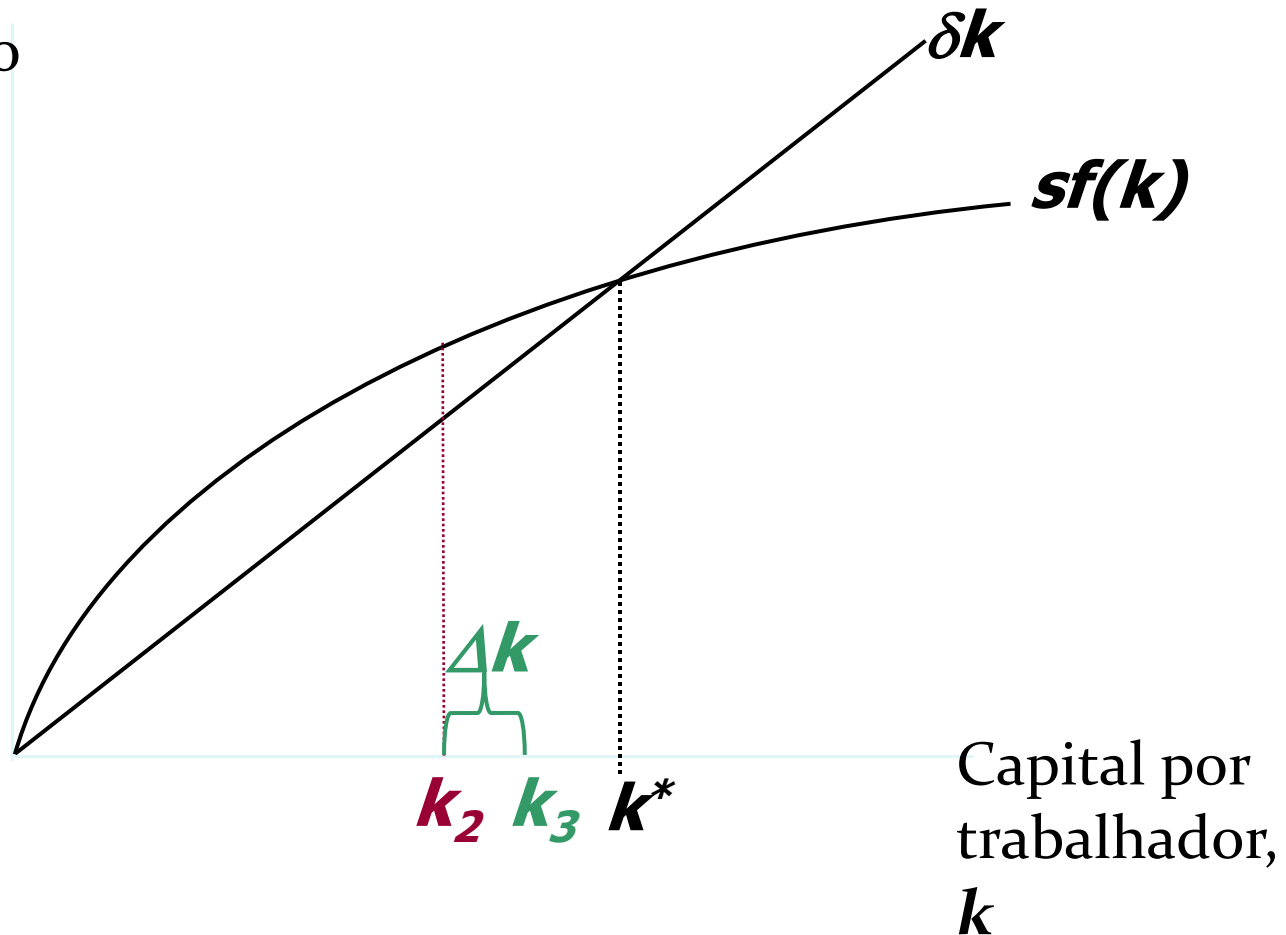
Investimento
e Depreciação



Movendo-se em direção ao estado estacionário

$$\Delta k = sf(k) - \delta k$$

Investimento
e Depreciação



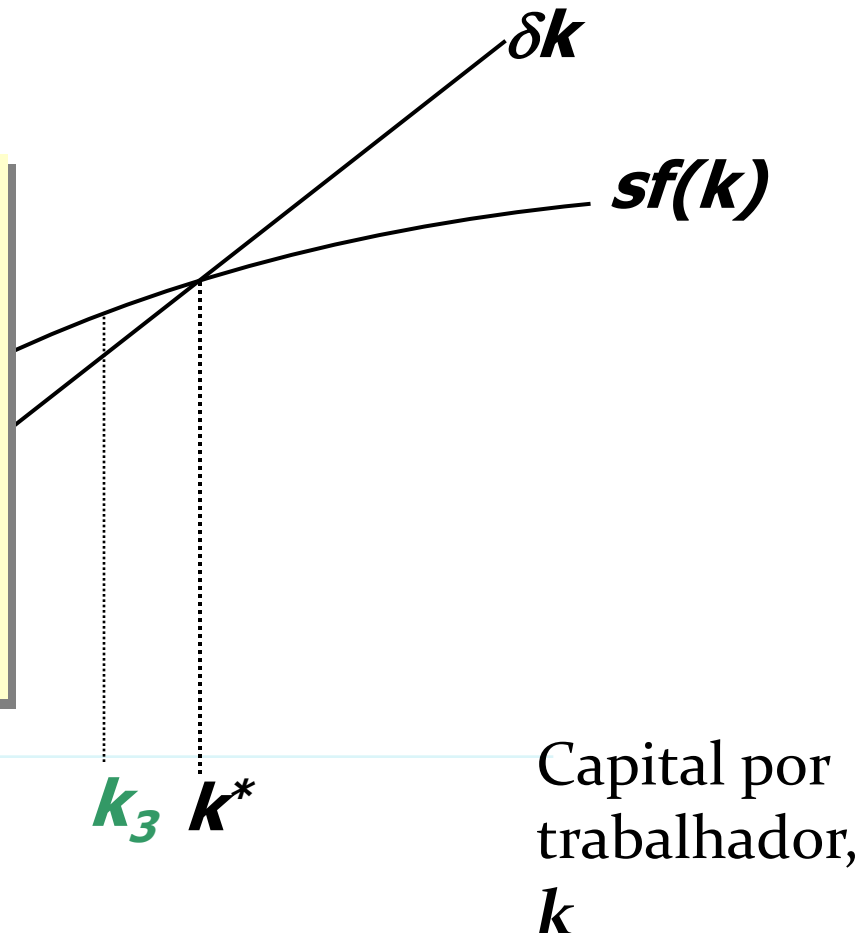
Movendo-se em direção ao estado estacionário

$$\Delta k = sf(k) - \delta k$$

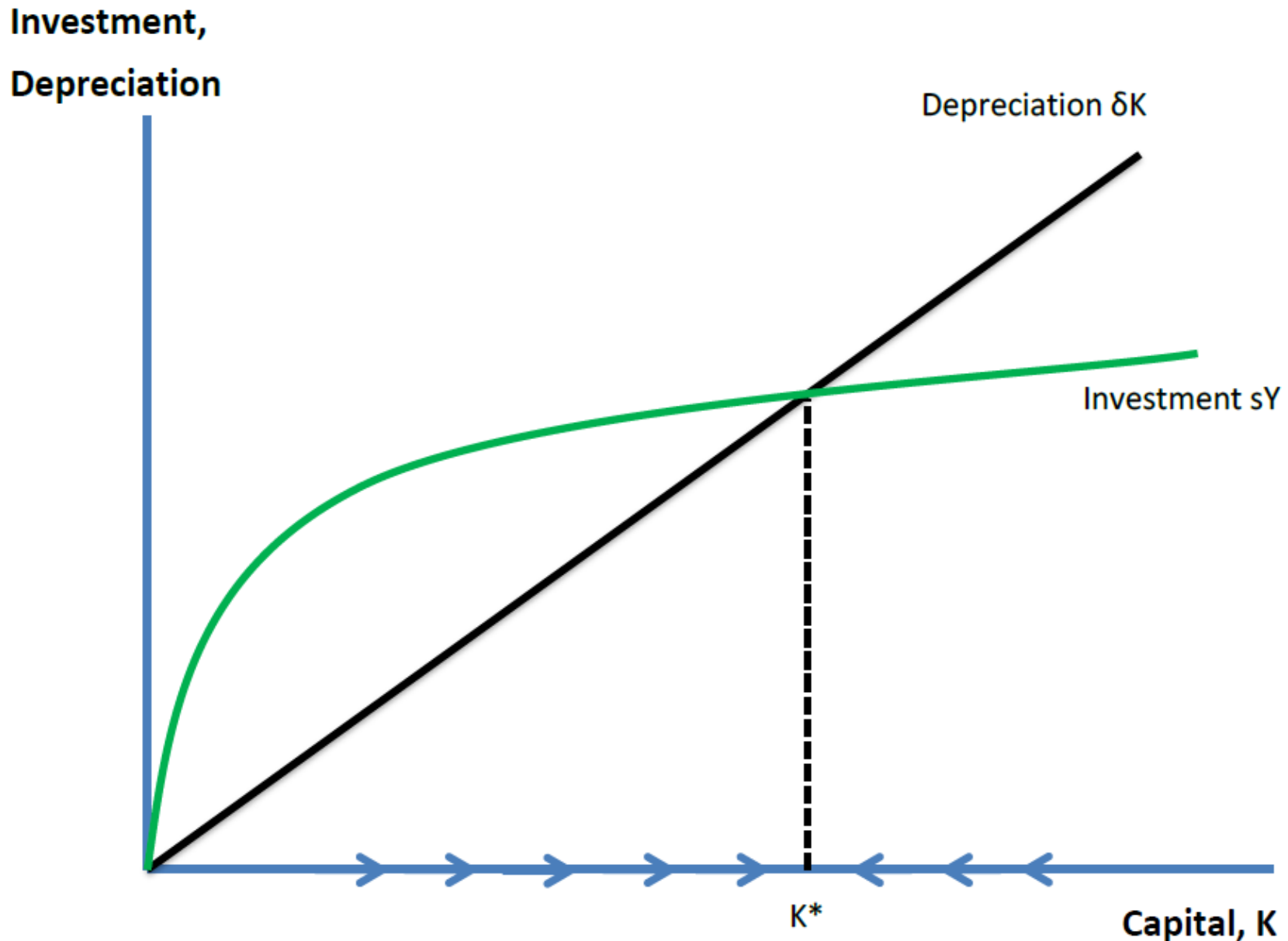
Investimento
e Depreciação

Resumo:

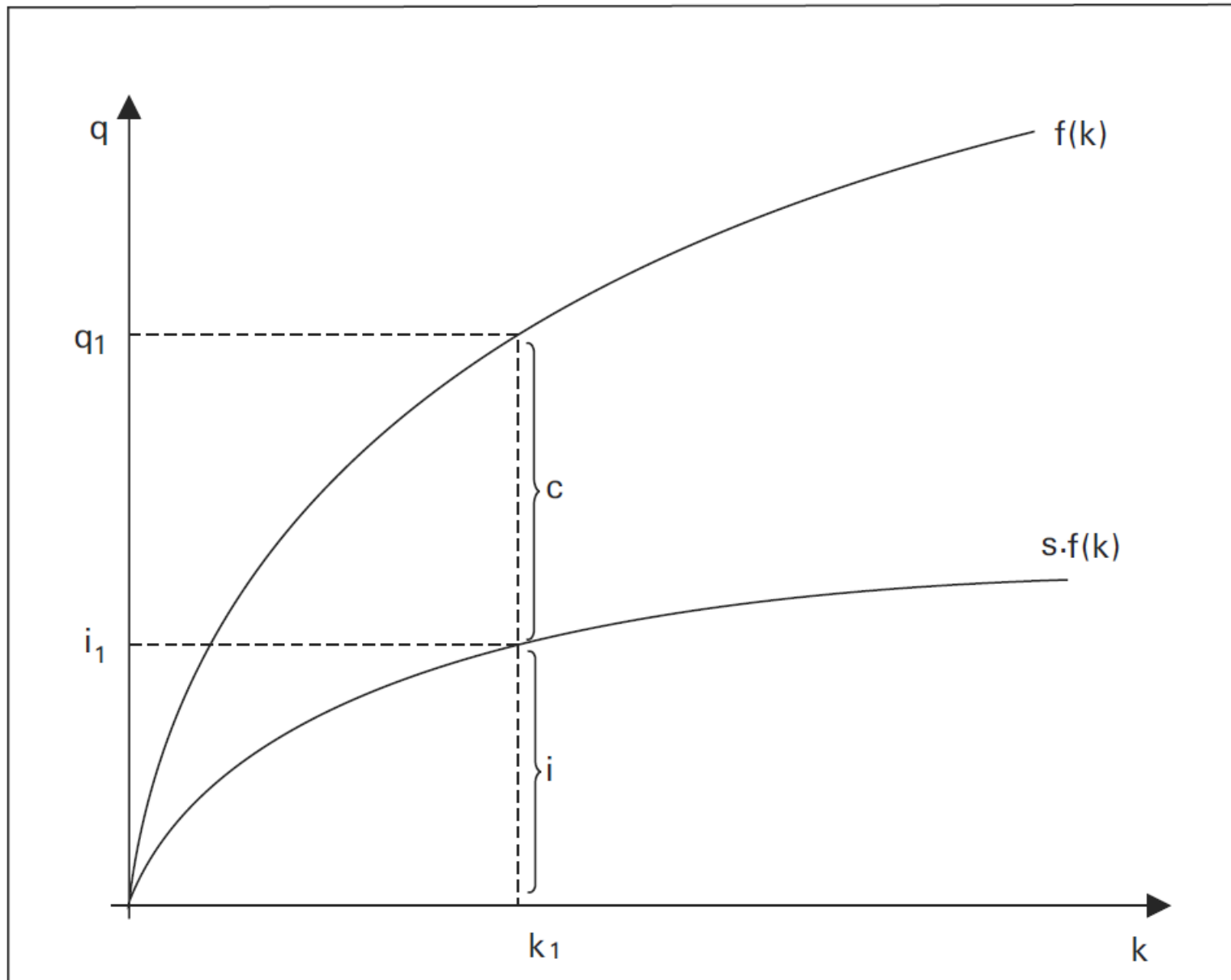
Equanto $k < k^*$, o investimento excederá a Depreciação e k continuará a crescer em direção a k^* .



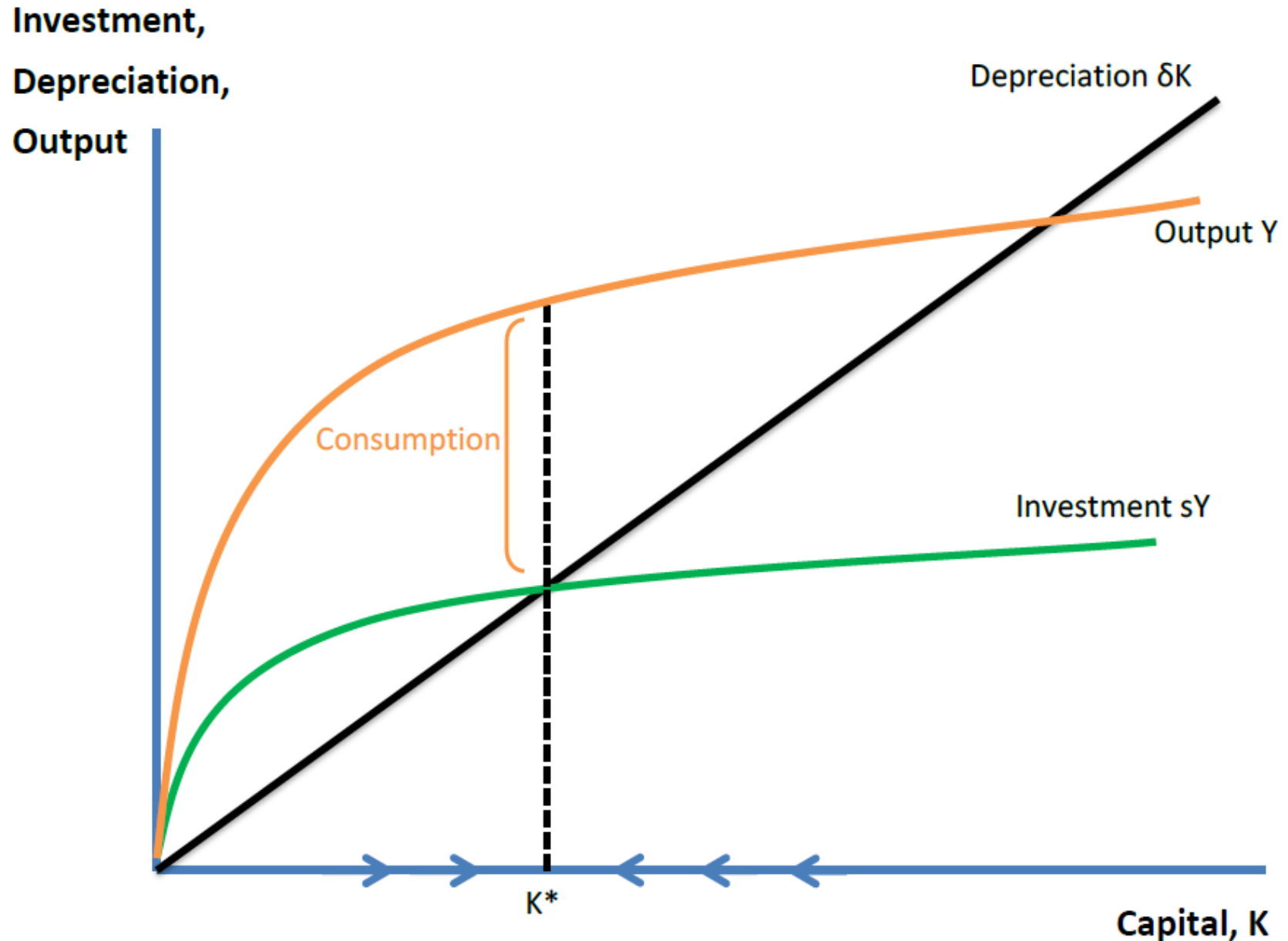
Modelo de Solow-Swan: Estado Estacionário



Contabilidade do Crescimento



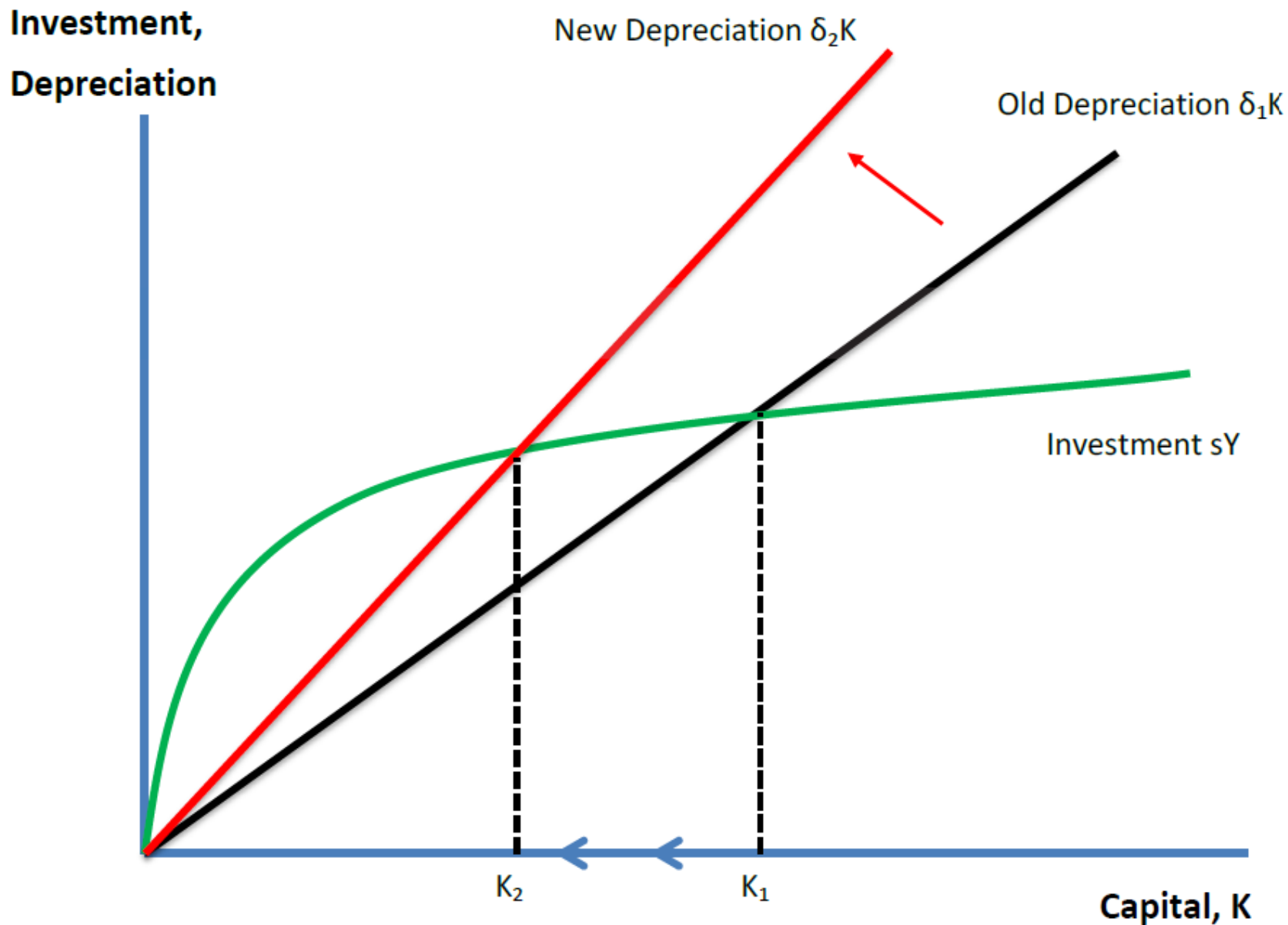
Capital e Produto no Modelo de Solow-Swan



**Modelo de Solow-Swan sem Crescimento
Populacional e sem Progresso Tecnológico (δk)**

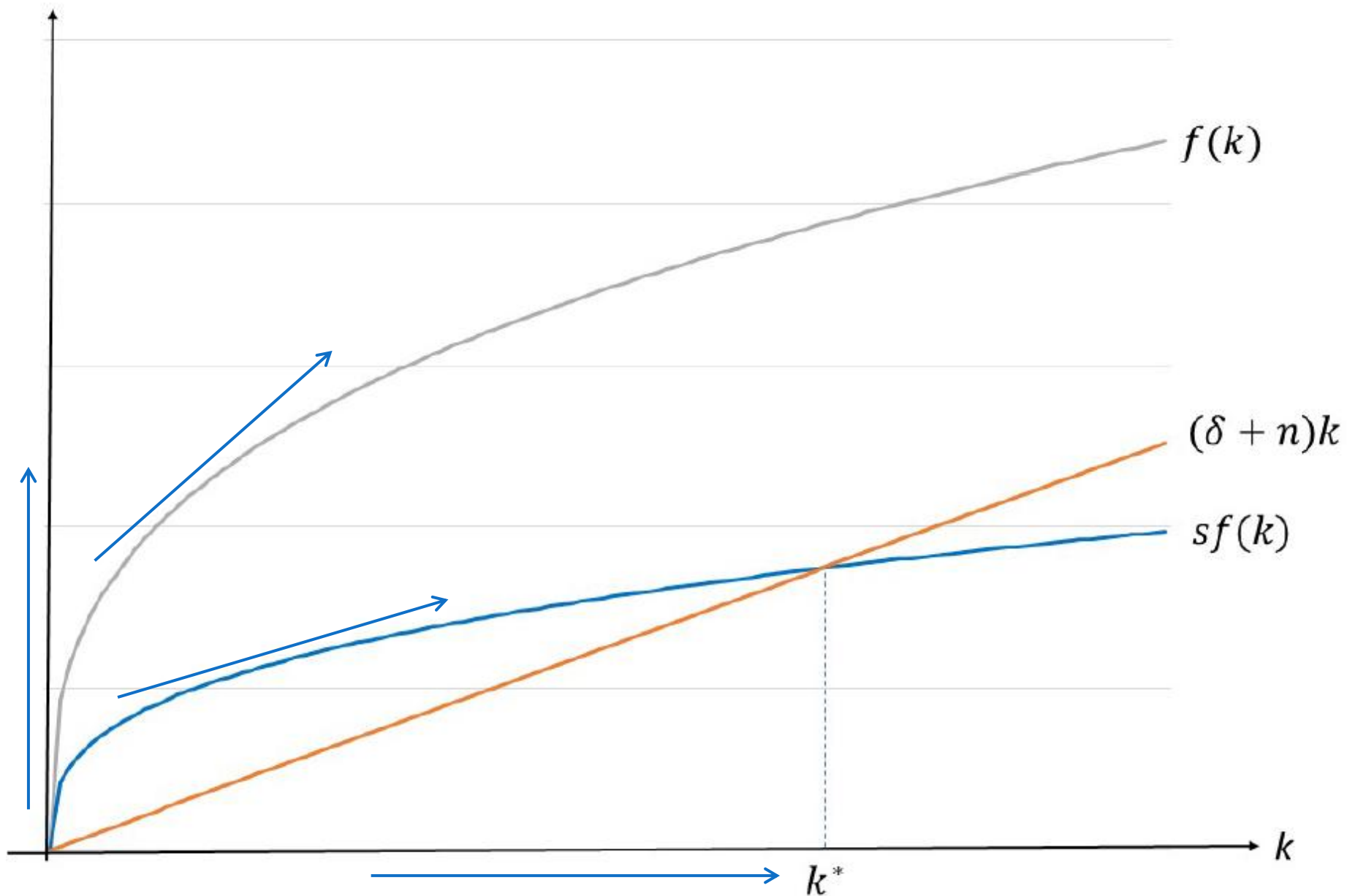
Mudanças na Taxa de Depreciação (δ)

Um aumento na taxa de depreciação



Modelo de Solow-Swan **com mudança**
populacional: $(\delta + n)k$

Equilíbrio de Longo Prazo



Estado Estacionário

Em estado estacionário, $\dot{k}_t = 0$ ou $\Delta k_{t+1} = 0$, de modo que: $sf(k^*) - (\delta + n)k^*$

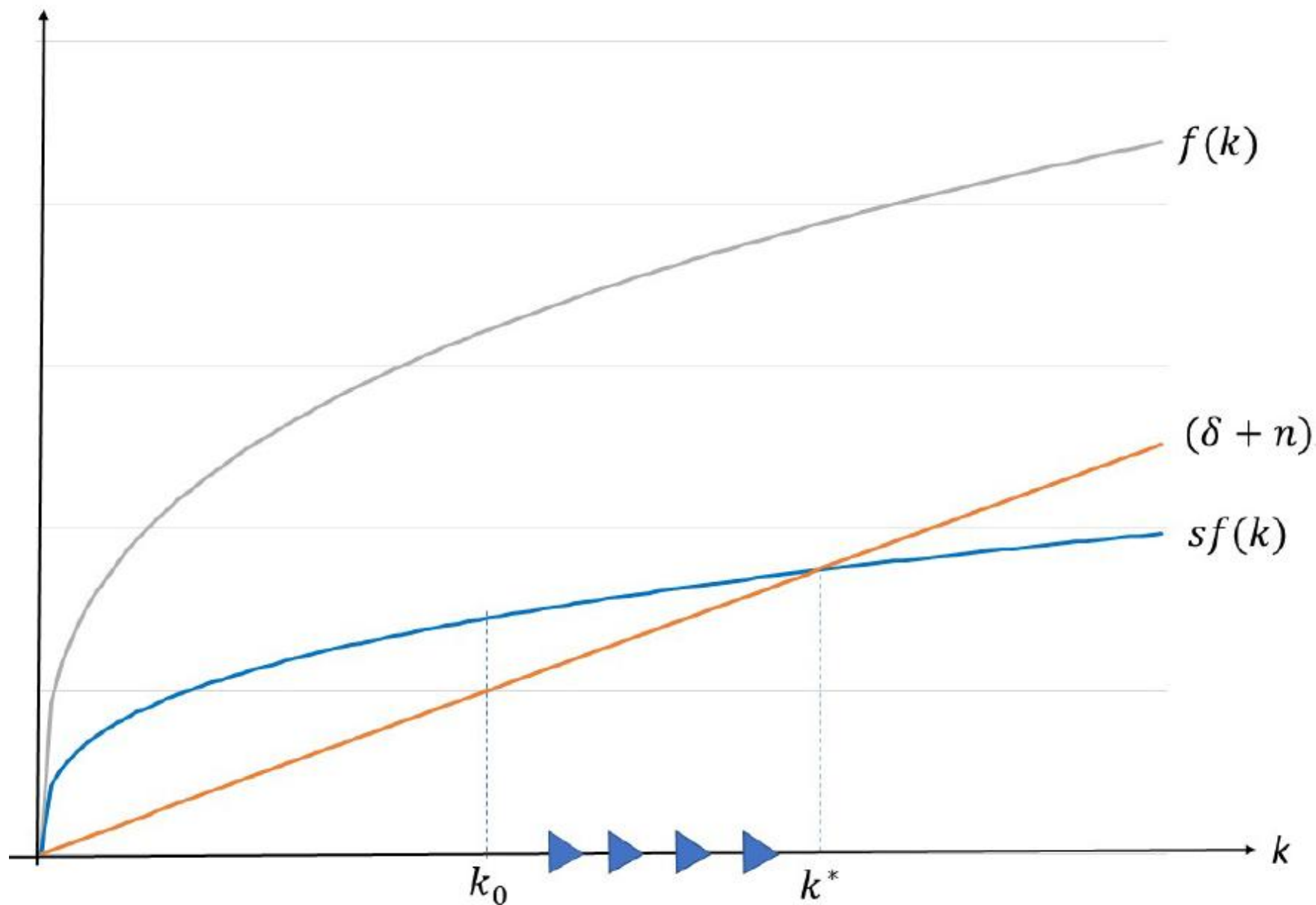
- ▶ k^* : capital por trabalhador de estado estacionário;
- ▶ Investimento por trabalhador = depreciação por trabalhador (ajustando pelo crescimento populacional)

Se $k_t = k^*$, então $\dot{k}_t = 0$:

- ▶ Nessa situação, capital por trabalhador se mantém constante ao longo do tempo (a não ser que algum choque ocorra).
- ▶ Outras variáveis também se mantêm constantes no tempo: $y^* = f(k^*)$, $i^* = sy^*$, $c^* = (1 - s)y^*$

Trata-se da tendência de longo prazo da economia.

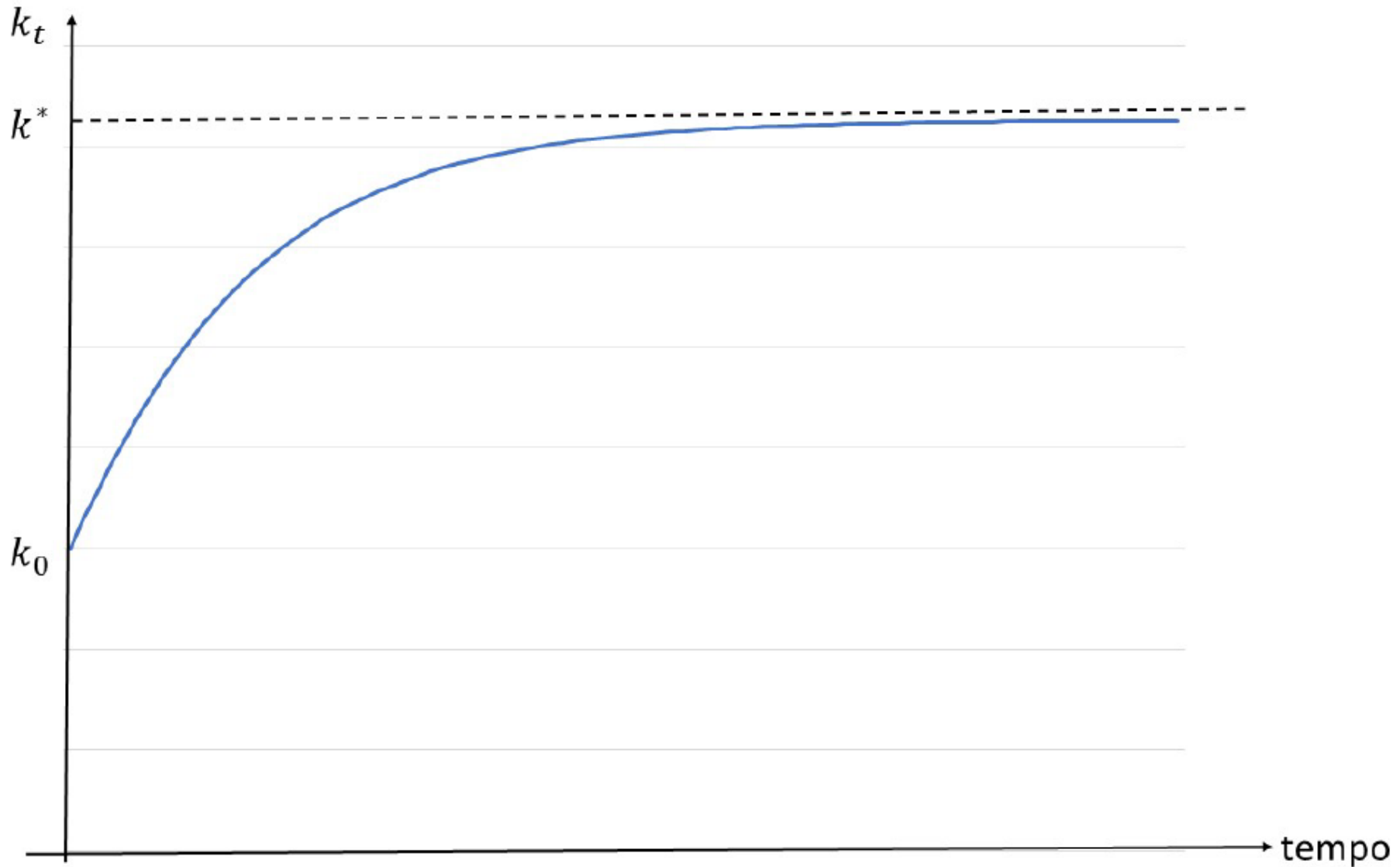
Trajetória do capital *per capita*: $k_0 < k^*$



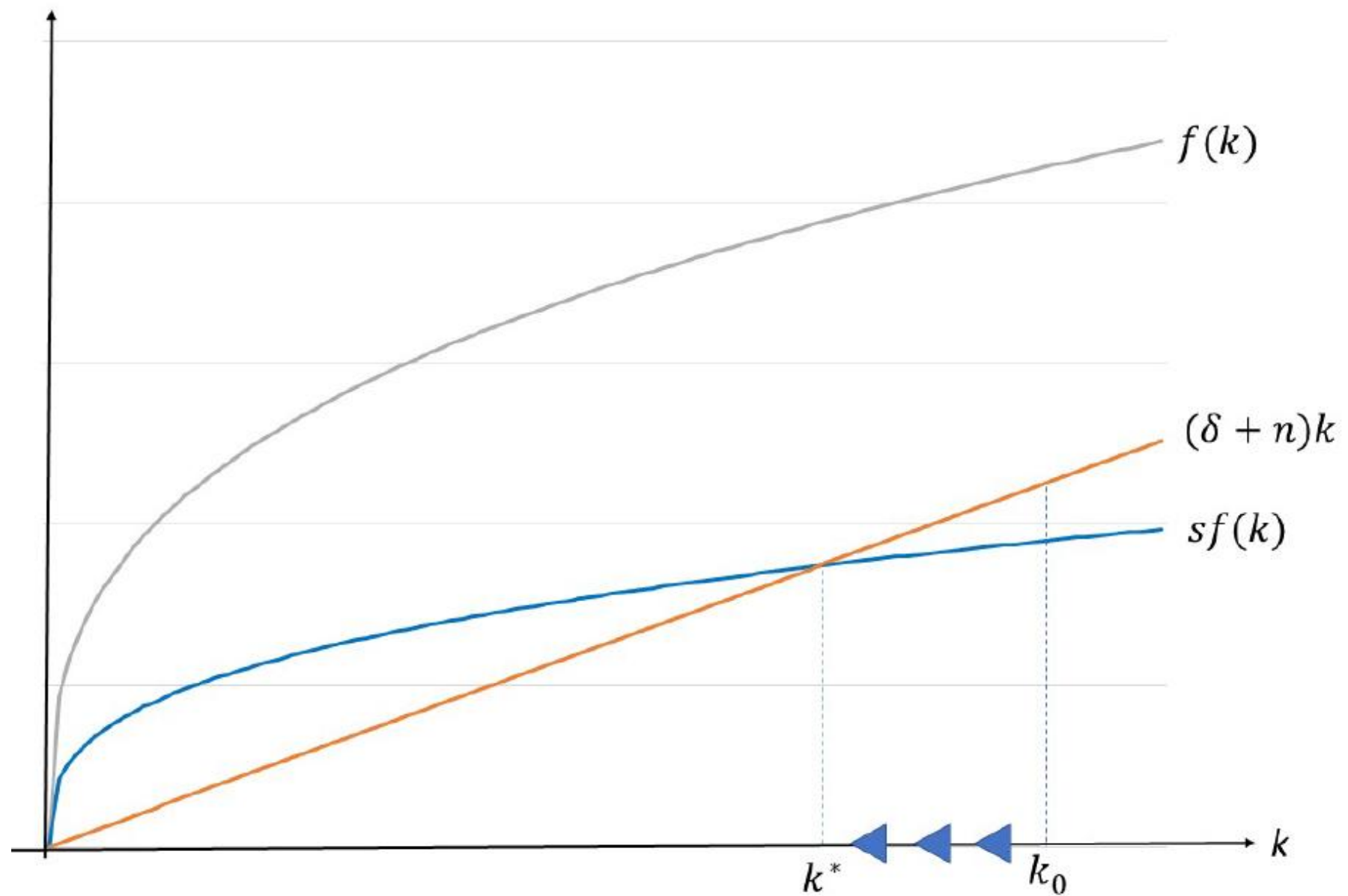
Trajetória do capital *per capita*: $k_0 < k^*$

- ▶ Suponha capital por trabalhador inicial **abaixo** do nível de estado estacionário: $k_0 < k^*$
- ▶ Nessa situação, investimento $>$ depreciação (por trabalhador):
 - Capital por trabalhador cresce ao longo do tempo ($\dot{k}_t > 0$)
 - Inicialmente, crescimento é elevado, pois capital é baixo e PMgK é alta.
 - À medida que o capital acumula, PMgK diminui, e taxa de crescimento se reduz.
 - No longo prazo, $k_t \rightarrow k^*$.

Trajetória do capital *per capita*: $k_0 < k^*$



Trajetória do capital *per capita*: $k_0 > k^*$

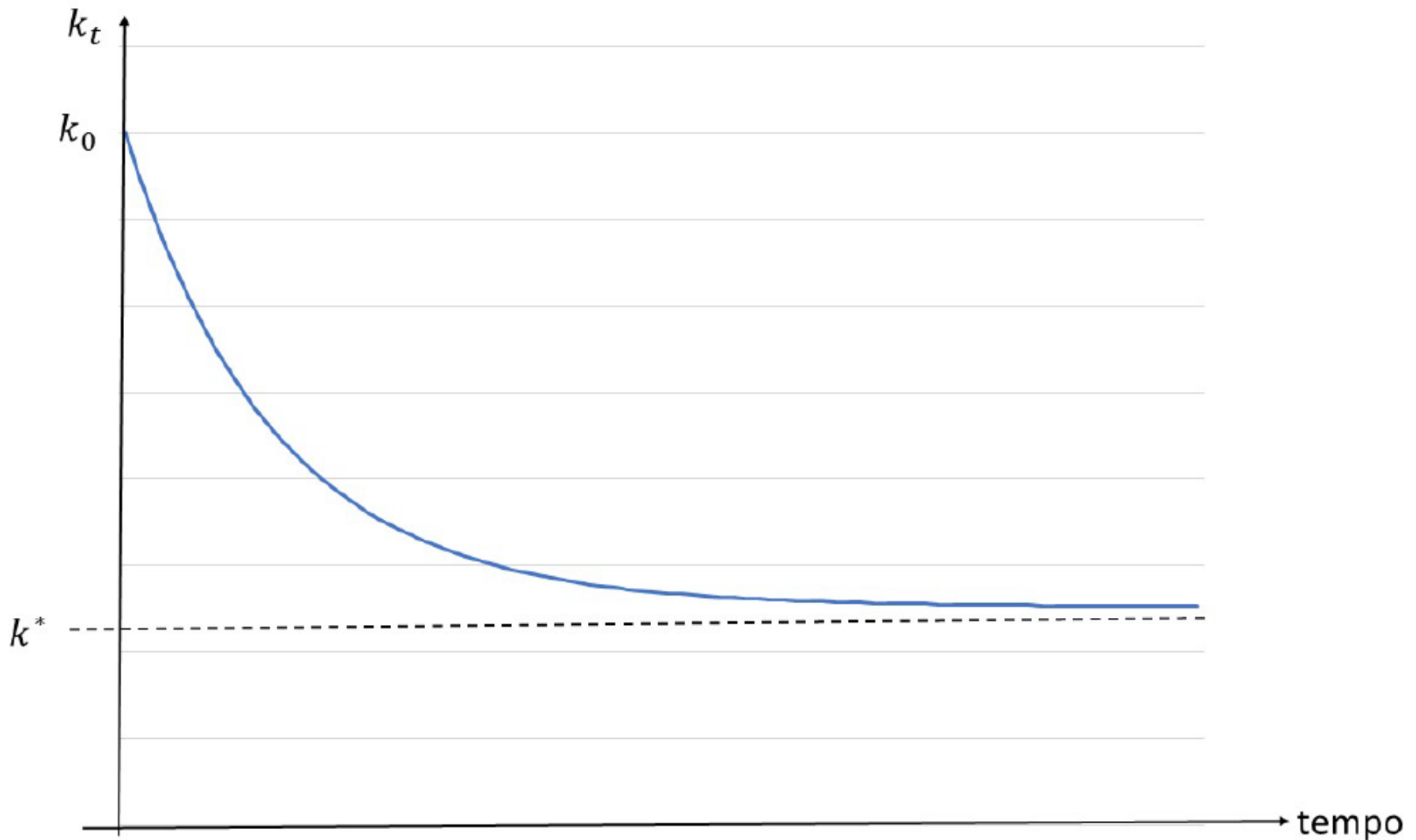


Trajetória do capital *per capita*: $k_0 > k^*$

- ▶ Suponha capital por trabalhador inicial **acima** do nível de estado estacionário: $k_0 > k^*$
- ▶ Nessa situação, investimento < depreciação (por trabalhador):
 - Capital por trabalhador decresce ao longo do tempo ($\dot{k}_t < 0$)
 - Inicialmente, decrescimento é elevado, pois capital é alta, mas e PMgK é baixa.
 - À medida que o capital acumula, PMgK aumenta, e taxa de decrescimento se reduz.
 - No longo prazo, $k_t \rightarrow k^*$.

Trajetória do capital *per capita*: $k_0 > k^*$

Figure: Trajetória do capital por trabalhador ($k_0 > k^*$)



Caso Cobb-Douglas

- $F(K_t, N_t) = A_t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha}; f(k_t) = A_t k_t^\alpha$

- Em estado estacionário:

$$sf(k^*) = (\delta + n)k^*$$

$$sA_t(k^*)^\alpha = (\delta + n)k^*$$

- Logo:

$$\frac{k^*}{(k^*)^\alpha} = (k^*)^{1-\alpha} = \frac{sA_t}{\delta + n}$$

Caso Cobb-Douglas

- Capital por trabalhador de estado estacionário:

$$k^* = \left(\frac{sA_t}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- Produto por trabalhador de estado estacionário:

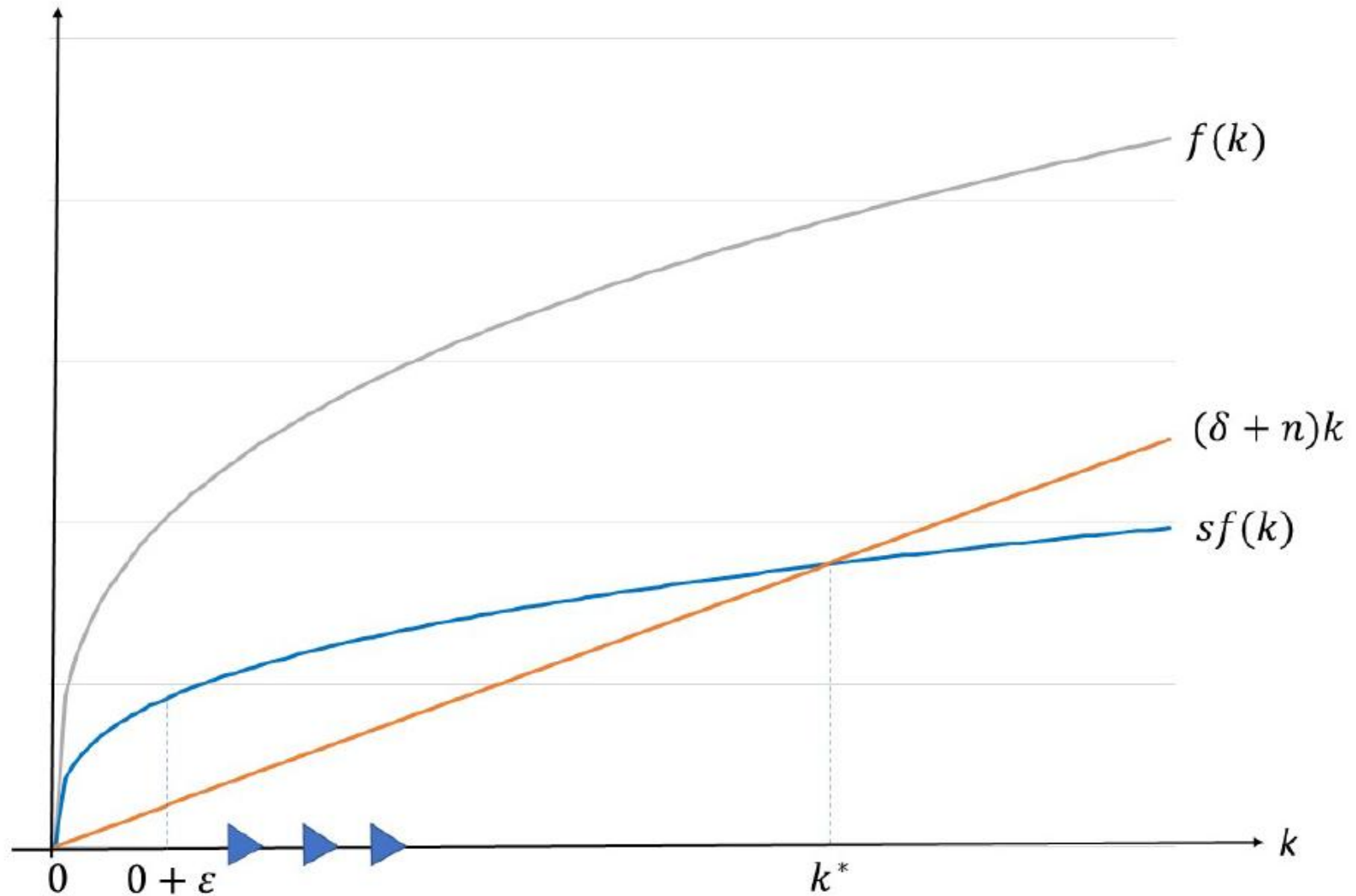
$$y^* = A_t (k^*)^\alpha = A_t \left(\frac{sA_t}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = A_t^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Estabilidade

- O Modelo de Solow-Swan tem dois estados estacionários: $k = k^*$ e $k = 0$.
 - se $k = 0$, investimento e depreciação são iguais a zero.
 - se nada ocorrer, a economia permanece nesse ponto.
- Mas $k = 0$ é um estado estacionário instável:
 - se ocorrer uma pequena perturbação, a economia não retorna para $k = 0$
 - Suponha $k_0 = 0 + \varepsilon$, em que $\varepsilon > 0$ é um número pequeno.
 - Nessa situação, investimento $>$ depreciação, e o capital acumula (não retorna para zero)

Estabilidade

Figure: Estado estacionário $k = 0$



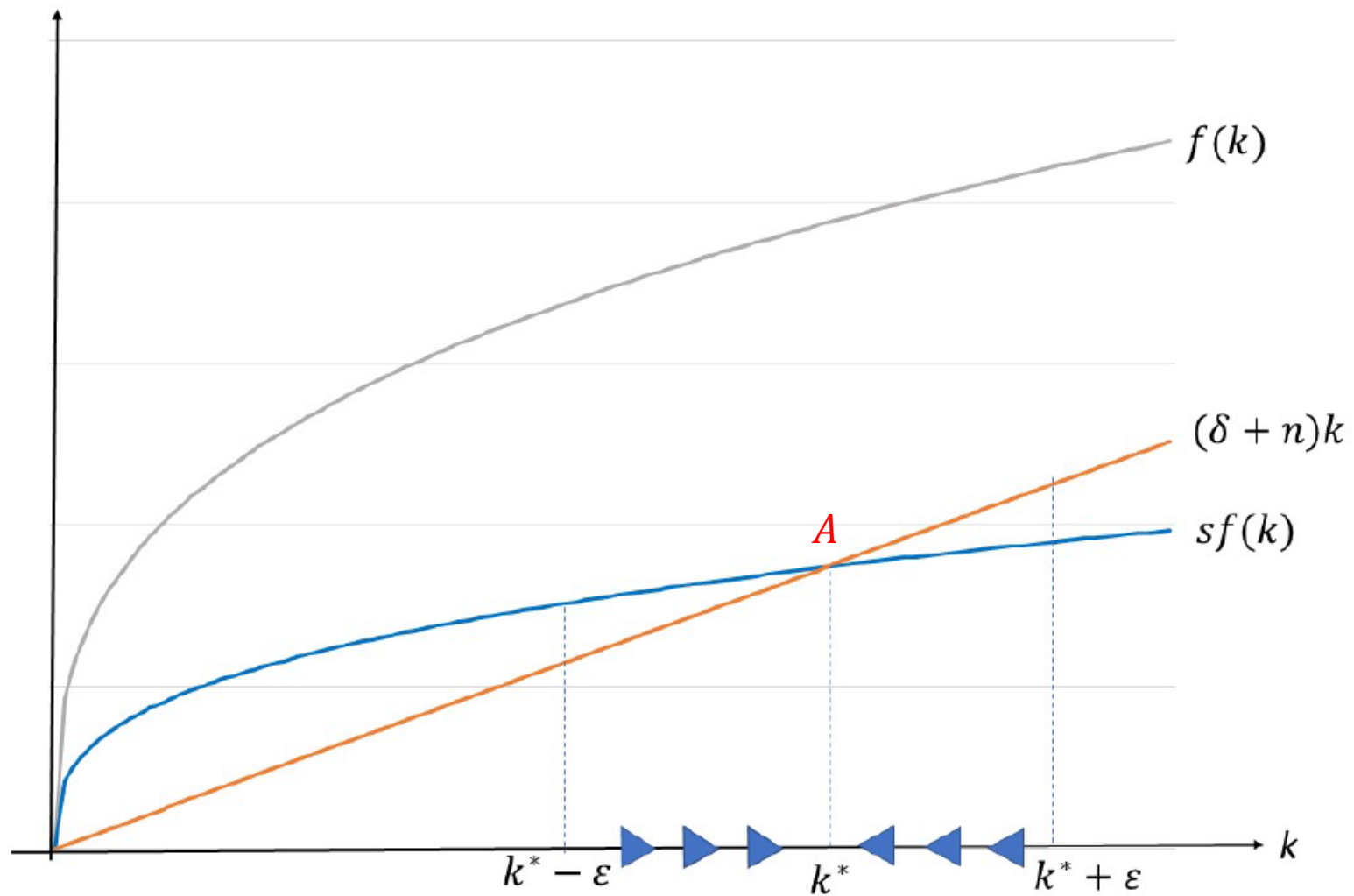
Estabilidade

- Já $k = k^*$ é um estado estacionário **estável**.
- Frente a perturbações em torno de k^* , a economia move-se em direção a esse estado estacionário.
 - Se $k_0 = k^* - \varepsilon$, investimento $>$ depreciação; o capital caminha em direção a k^* ao longo do tempo.
 - Se $k_0 = k^* + \varepsilon$, investimento $<$ depreciação; o capital caminha em direção a k^* ao longo do tempo.
- Na verdade, para qualquer $k_0 > 0$:

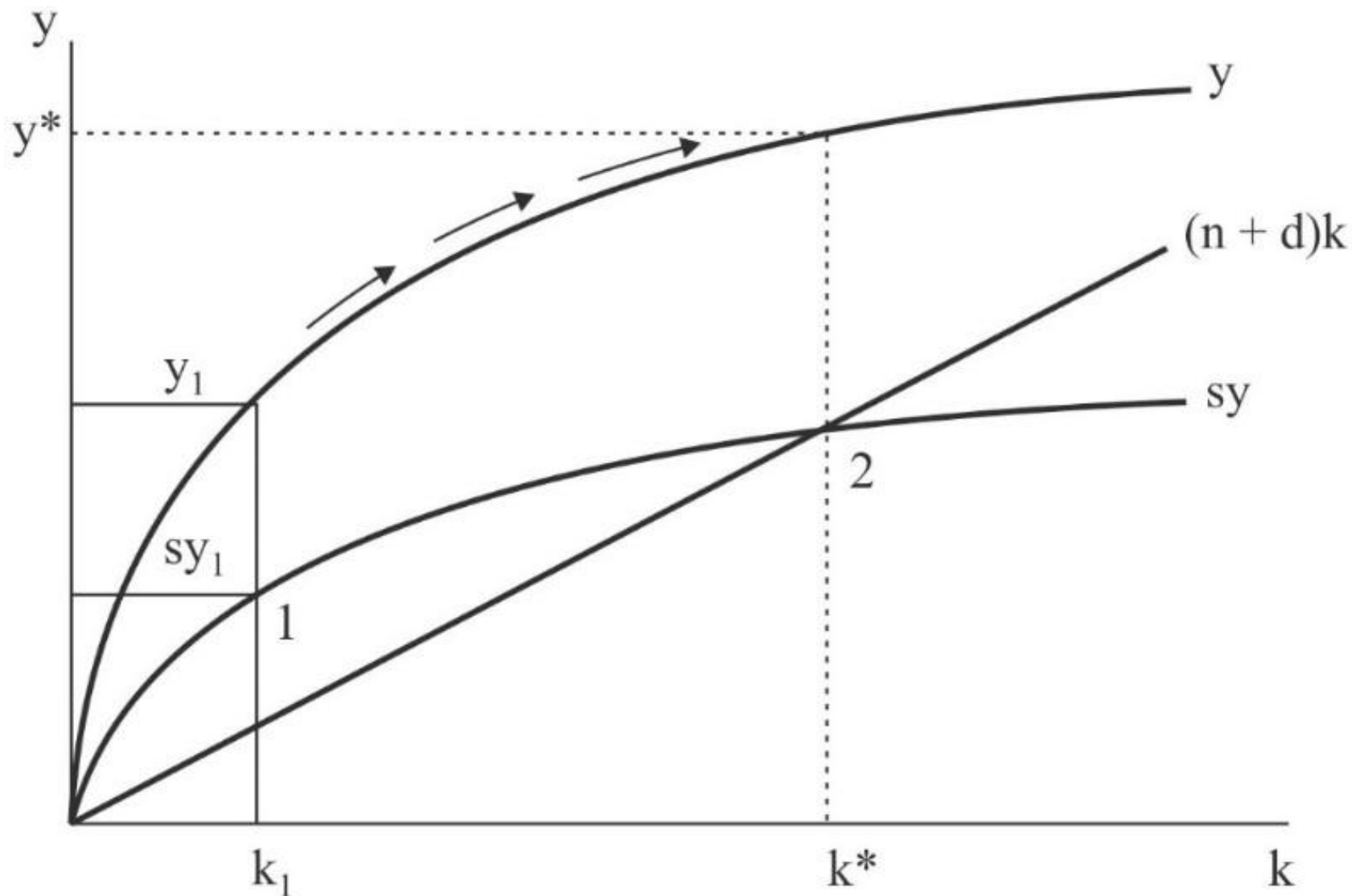
$$k_t \rightarrow k^*, \text{ quando } t \rightarrow \infty$$

Estabilidade

Figure: Estado estacionário $k = k^*$



Mudança na Taxa de Poupança



Taxa de Crescimento do Capital *per capita*

Defina:

$$\frac{\Delta k_{t+1}}{k_t} = \gamma \Leftrightarrow \Delta k_{t+1} = \gamma k_t$$

Qual é o maior valor do crescimento do estoque de capital que uma economia consegue sustentar?

Diagrama de Fases

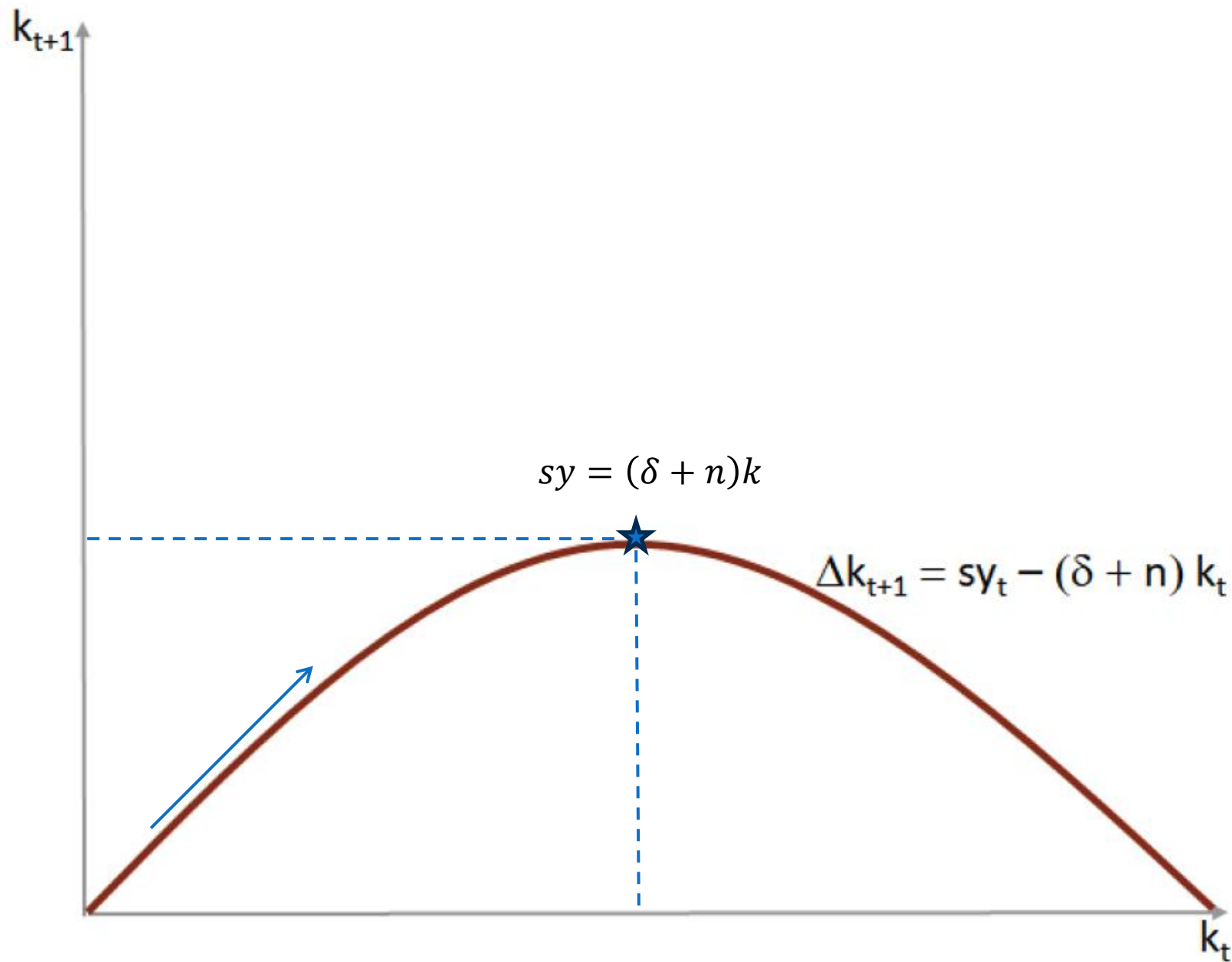
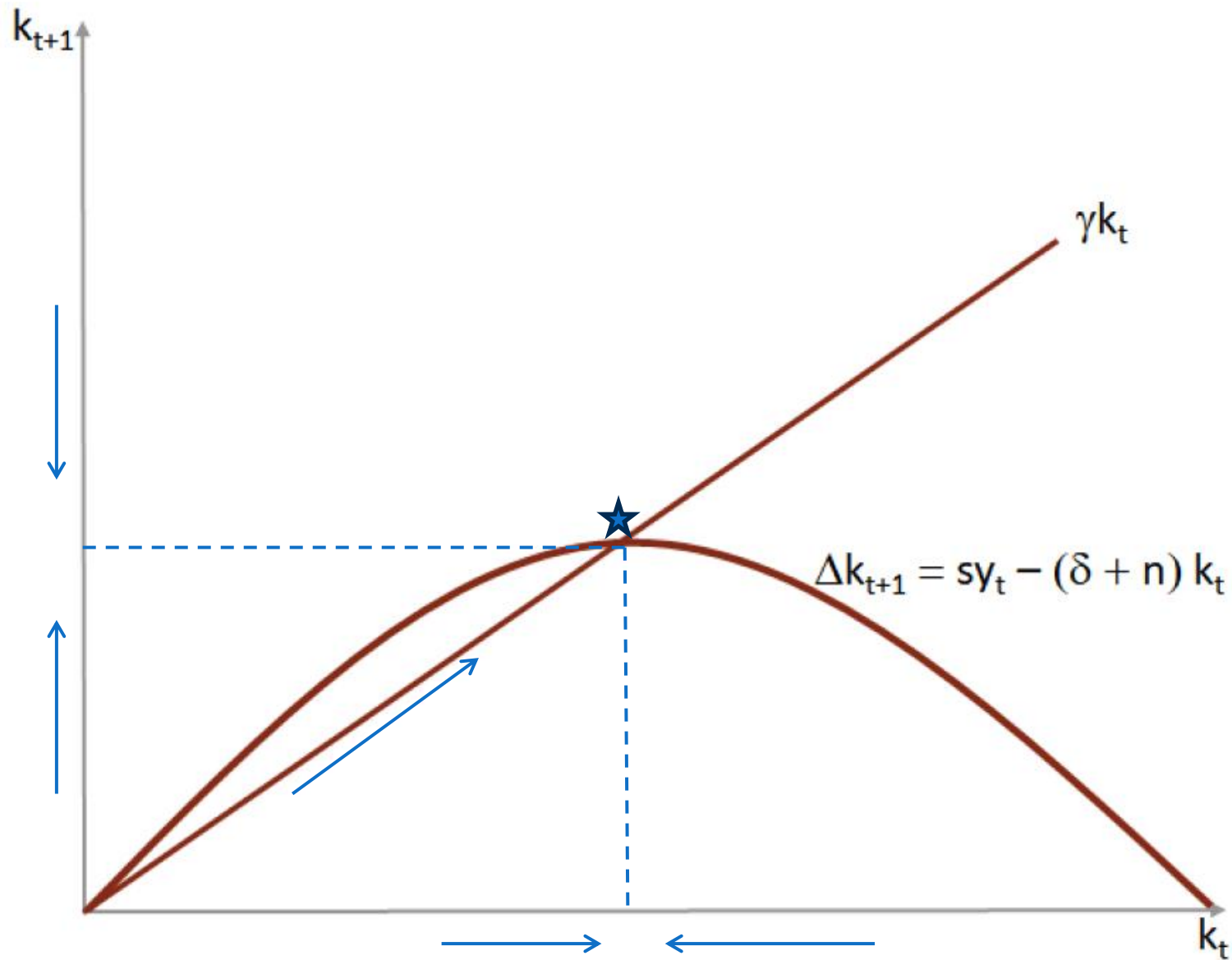


Diagrama de Fases



Taxa de Crescimento do Capital *per capita*

Defina:

$$\frac{\Delta k_{t+1}}{k_t} = \gamma = s \left(\frac{y_t}{k_t} \right) - (\delta + n) \quad (15)$$

Temos que:

$$\frac{d\gamma}{dk_t} = \frac{s}{k_t} \left[\frac{\partial y_t}{\partial k_t} - \frac{y_t}{k_t} \right] = -\frac{s y_t}{k_t^2} \left[1 - \frac{k_t}{y_t} \frac{\partial y_t}{\partial k_t} \right] < 0 \quad (16)$$

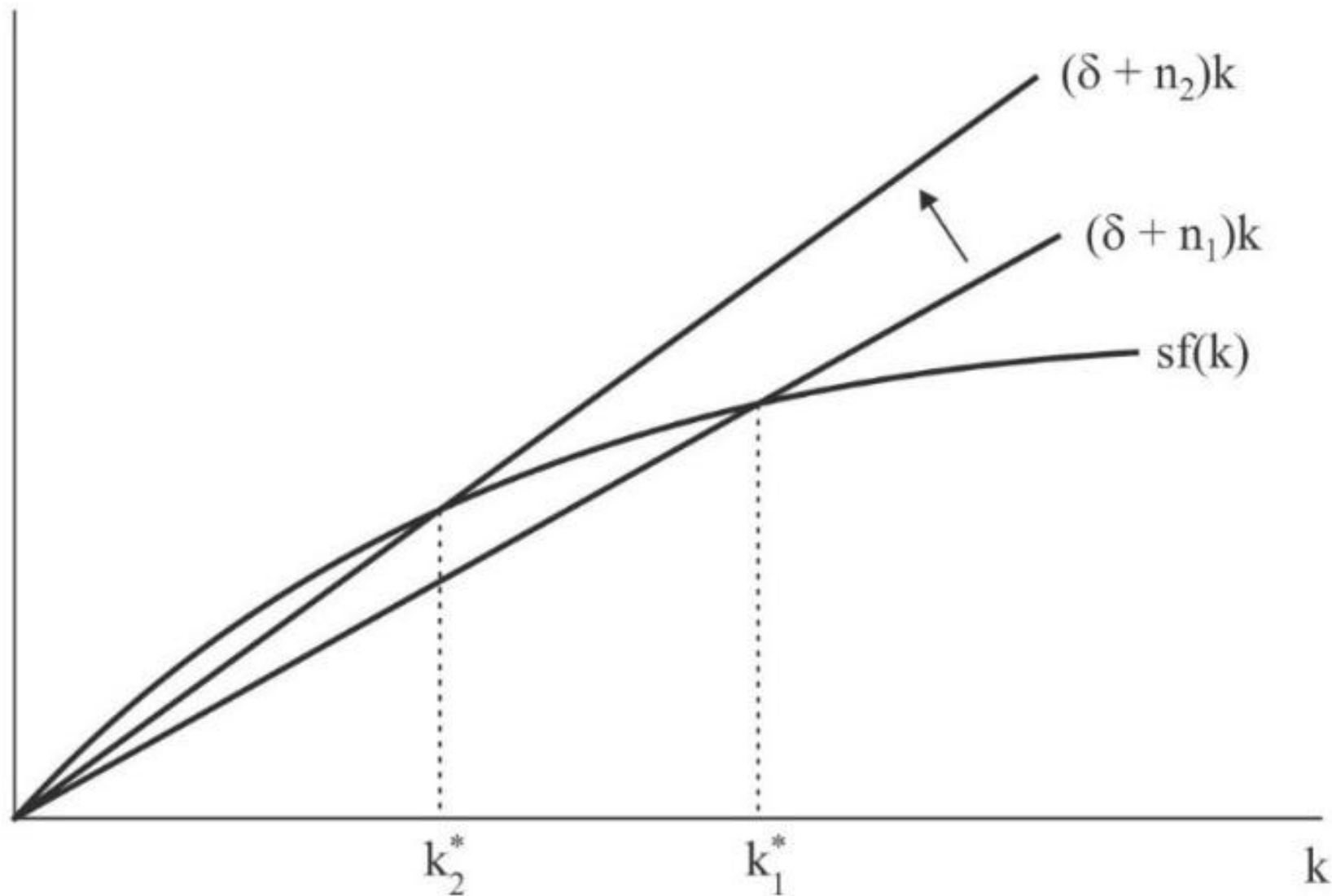
Pois a elasticidade do capital é dada por:

$$\frac{k_t}{y_t} \frac{\partial y_t}{\partial k_t} < 1$$

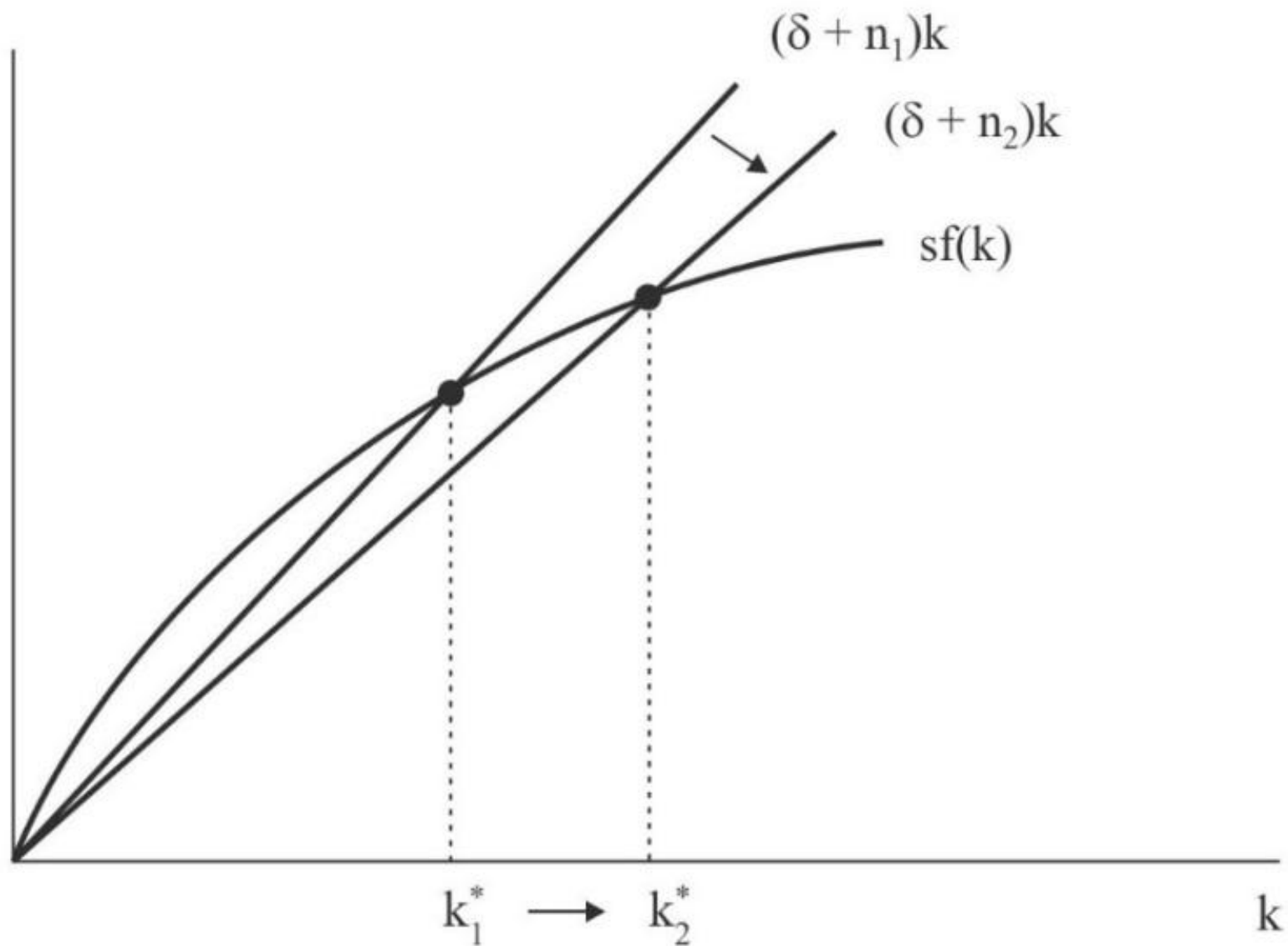
Modelo de Solow-Swan com mudança populacional: $(\delta + n)k$

Elevação (Redução) Populacional (n)

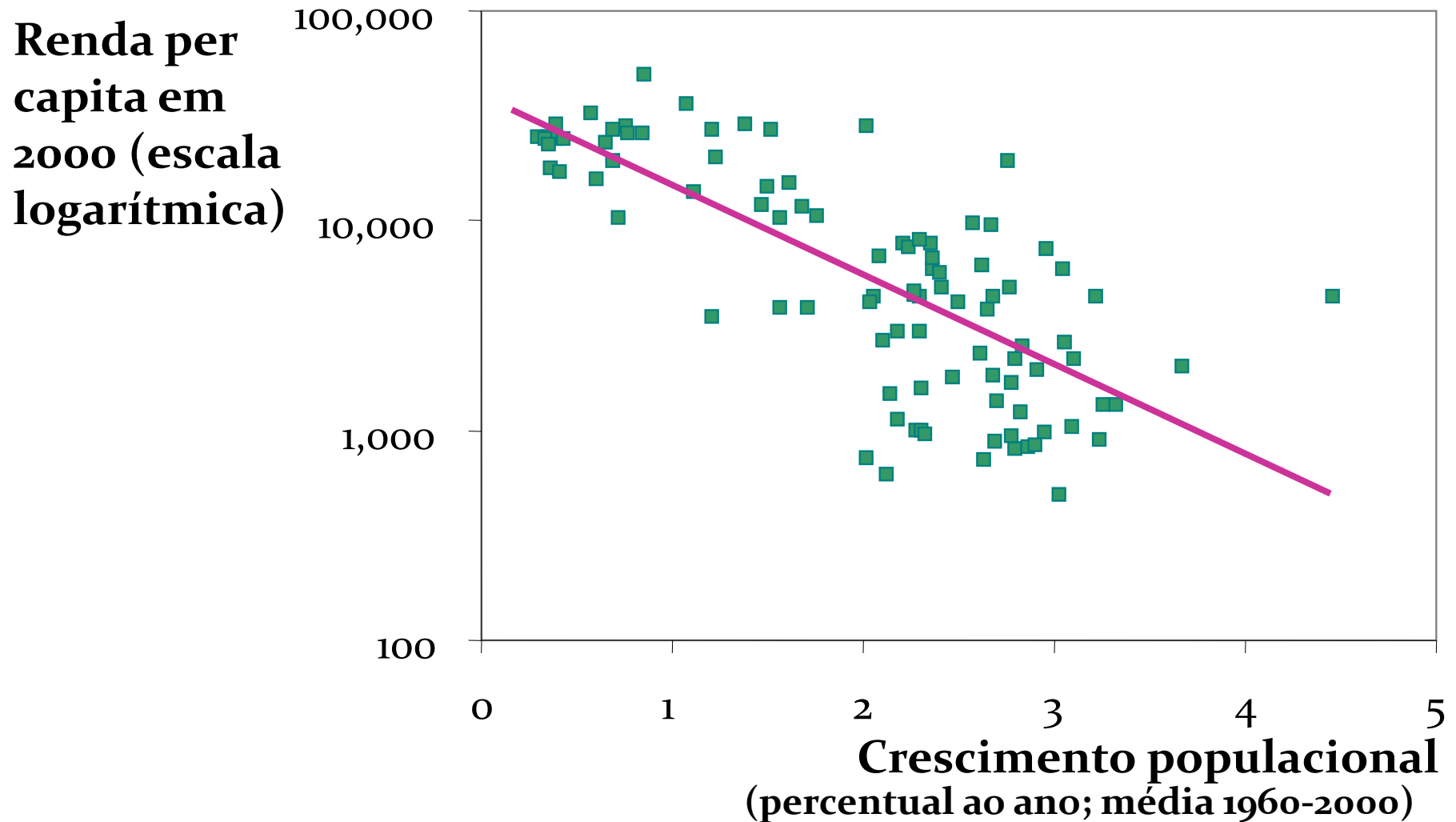
Efeitos do Crescimento Populacional



Efeitos do Crescimento Populacional



Evidências internacionais sobre crescimento populacional e renda *per capita*



Efeitos do Crescimento Populacional

Análise de Estática Comparativa no Modelo de Solow com Crescimento Populacional

Variáveis

Nível de Equilíbrio

Taxa de Crescimento no Equilíbrio

$s \uparrow$

$k^* \uparrow, y^* \uparrow, c^* \uparrow, s^* \uparrow$

Não muda

$n \uparrow$

$k^* \downarrow, y^* \downarrow, c^* \downarrow, s^* \downarrow$

Aumenta

Onde: $\uparrow \Rightarrow$ aumenta; $\downarrow \Rightarrow$ diminui; $*$ $\Rightarrow$ equilíbrio

**Modelo de Solow-Swan com mudança
populacional: $(\delta + n)k$**

Mudança na Taxa de Poupança (s)

Mudança na taxa de poupança

Lembre-se que o capital por trabalhador evolui de acordo com a seguinte equação: $\dot{k}_t = sf(k_t) - (\delta + n)k_t$

Em estado estacionário: $sf(k^*) = (\delta + n)k^*$

► Suponha a economia inicialmente em estado estacionário com taxa de poupança s_A :

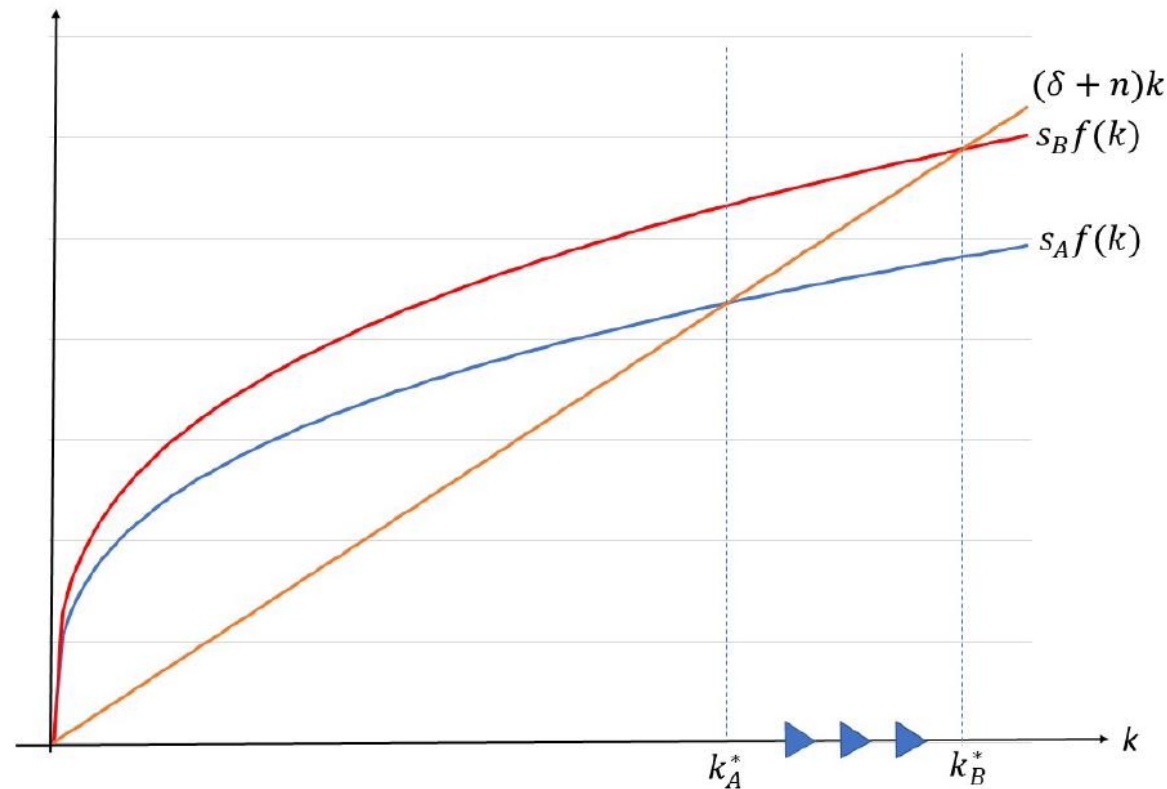
→ capital por trabalhador: k_A^*

→ produto por trabalhador: $y_A^* = f(k_A^*)$

► No instante t_0 , a taxa de poupança aumenta permanentemente para $s_B > s_A$

Mudança na Taxa de Poupança

Figure: Aumento na taxa de poupança



Para qualquer valor positivo do estoque de capital inicial, a economia irá convergir para o estado estacionário, e nele permanecerá até que ocorra alguma mudança em uma variável exógena.

A figura ao lado ilustra o efeito de um aumento da taxa de poupança sobre o estoque de capital.

Aumento na taxa de poupança

Aumentos na taxa de poupança leva a um estoque de capital por trabalhador mais alto em estado estacionário:

$$k_B^* > k_A^*$$

Renda *per capita* será mais alta como consequência, pois $y_t = f(k_t)$. Logo:

$$y_B^* > y_A^*$$

Transição

Aumento não é imediato:

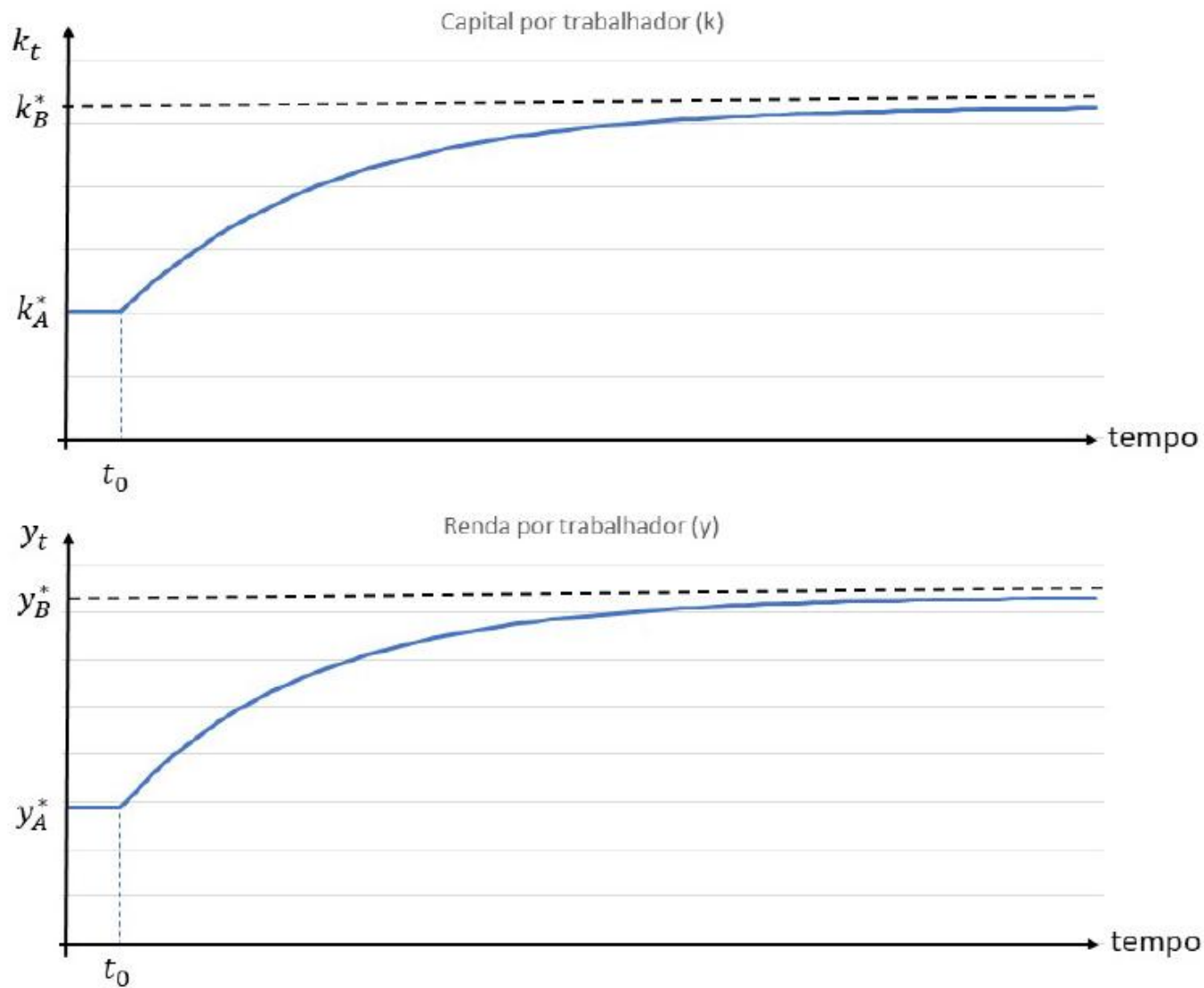
- ▶ em t_0 , o estoque de capital por trabalhador ainda está em seu nível original (variável de estado).
- ▶ Cresce ao longo do tempo, pois a taxa de poupança mais alta fará com que o investimento fique acima da taxa de depreciação temporariamente.
- ▶ Com o tempo, o crescimento irá se reduzir pois a PMgK é decrescente.
- ▶ Renda por trabalhador segue trajetória semelhante.

Transição

- ▶ Como a regra de movimento de capital não admite descontinuidades, a mudança de k_A^* para k_B^* vai ocorrer de forma gradual. O período em que ocorre esta mudança é chamado de **transição**.
- ▶ A economia se encontra em transição quando o estoque de capital está se ajustando para um novo estado estacionário.
- ▶ **Reforma da previdência** é um exemplo de caso onde a dinâmica de transição é tão ou mais importante do que o estado estacionário.

Transição

Figure: Transição

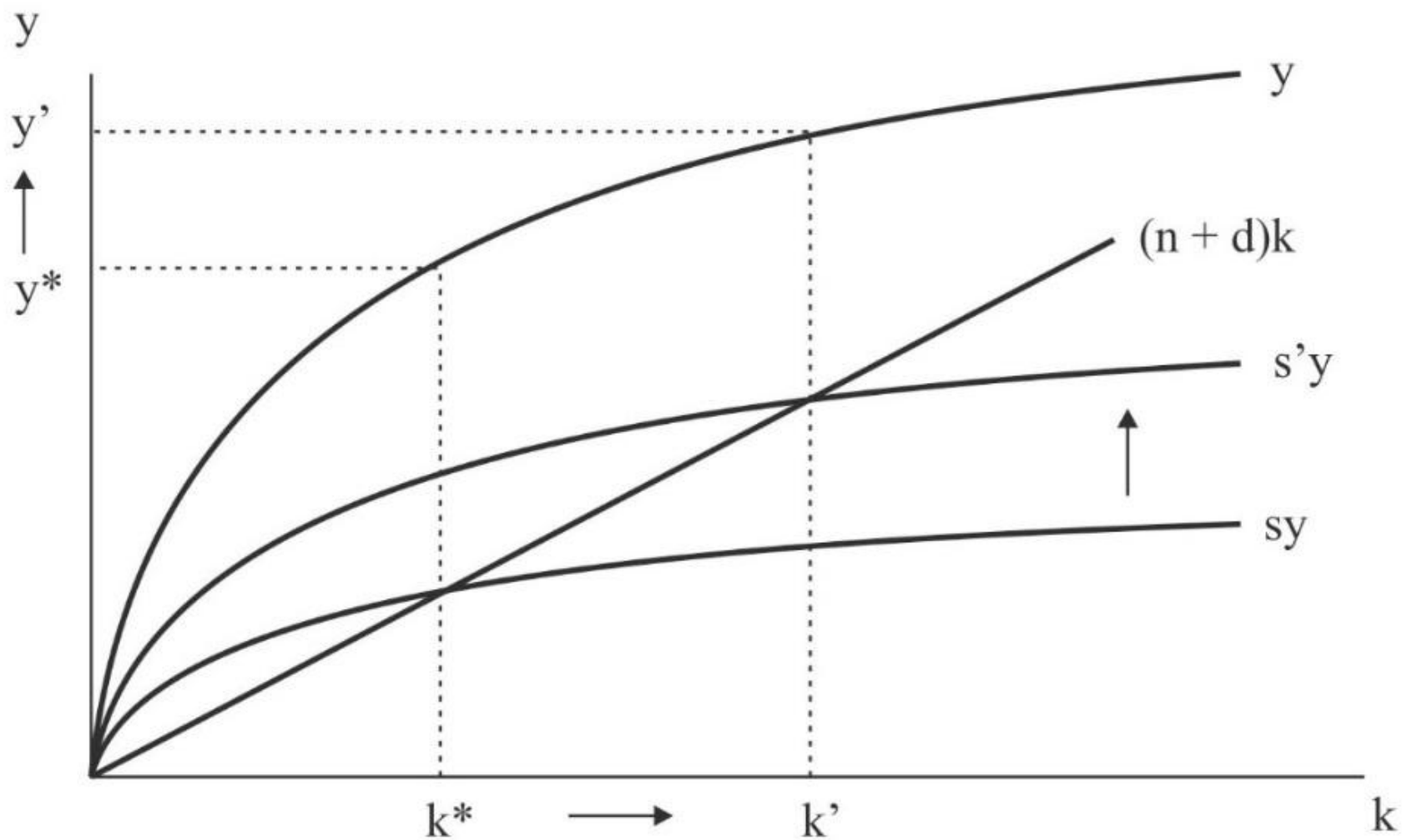


Implicações de Política

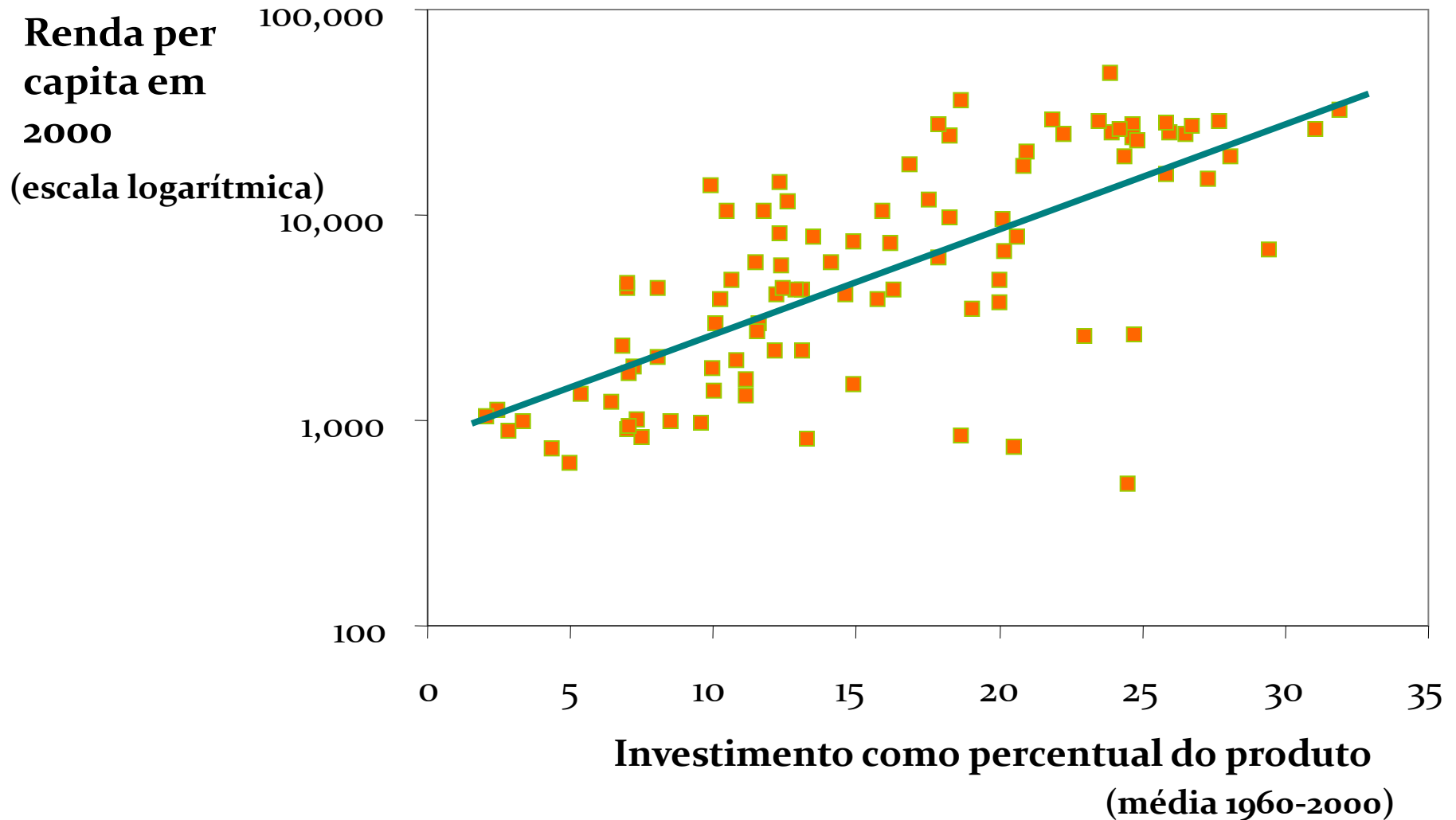
- Aumento na taxa de poupança leva a um aumento permanente no nível da renda por trabalhador de um país.
- Todavia, observa-se um aumento apenas transitório na taxa de crescimento da renda *per capita*.
- ▶ Capital exhibe retornos marginais decrescentes.

- Suponha, agora, dois países, o primeiro com uma taxa de poupança s^* e o segundo com uma taxa de poupança s' , maior que s^* . A taxa de crescimento da população é a mesma, e a taxa de depreciação do capital também é igual nos dois países. A diferença é o ponto de intersecção entre a curva de poupança e a reta de aumento do capital nos dois países. **A nação com maior taxa de poupança tem nível maior de renda per capita no estado estacionário e maior proporção entre capital e trabalho no estado estacionário.** Nos dois casos, contudo, a taxa de crescimento no estado estacionário é a mesma, igual à taxa de crescimento da força de trabalho n .
- **Maior $s \Rightarrow$ maior k^* .**
- **E, como $y = f(k)$, um k^* mais elevado $\Rightarrow$ um y^* mais elevado.**
- **Assim, o modelo de Solow-Swan prevê que países com taxas mais altas de poupança e investimento terão níveis mais elevados de capital e renda por trabalhador no longo prazo.**

Mudança na Taxa de Poupança



Evidência internacional sobre taxas de investimento e renda *per capita*



Modelo de Solow-Swan **com mudança**
populacional: $(\delta + n)k$

Regra de Ouro

Efeitos sobre o consumo de estado estacionário

- Lembre-se que o consumo é uma fração $(1 - s)$ da renda.

$$C_t = (1 - s)Y_t$$

- Dividindo por N_t , obtém-se o consumo por trabalhador em função da renda por trabalhador: $c_t = (1 - s)f(k_t)$

- Em estado estacionário: $c^* = (1 - s)f(k^*)$

- Aumento em s tem dois efeitos:

► Eleva o nível de renda por trabalhador de estado estacionário: $f(k^*)$;

→ contribui para aumentar c^* ;

► Diminui a parcela da renda alocada a consumo;

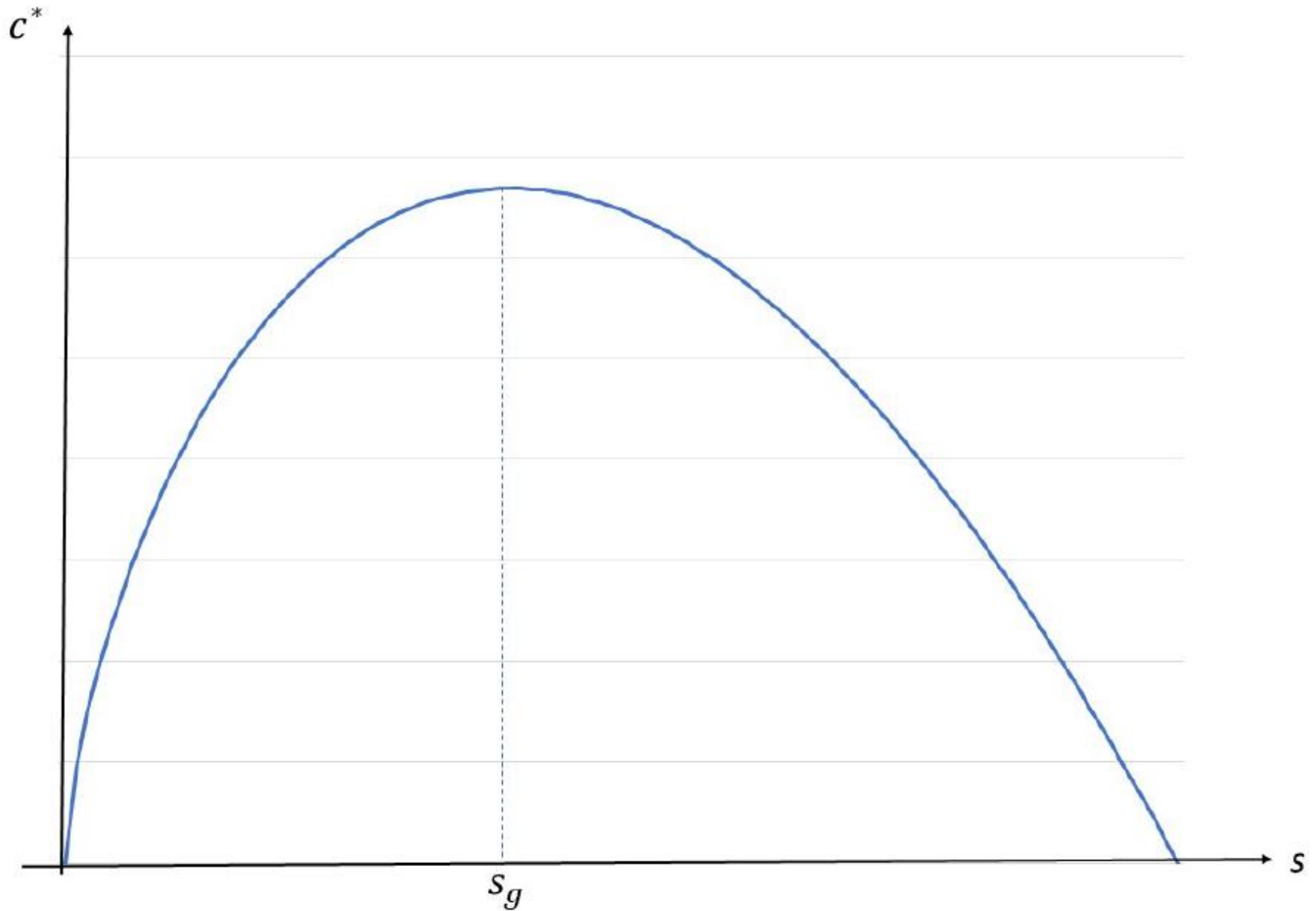
→ contribui para diminuir c^* ;

Regra de Ouro

- Se s baixo $\Rightarrow k^*$ baixo e PMgK elevada;
 - ▶ Aumento em s leva a um aumento significativo em $f(k^*)$
 - ▶ Primeiro efeito domina; c^* aumenta.
- Se s alto $\Rightarrow k^*$ alto e PMgK baixa;
 - ▶ Aumento em s leva a um aumento pequeno em $f(k^*)$
 - ▶ Segundo efeito domina; c^* diminui.

Regra de ouro: a taxa de poupança (s_g) que maximiza o consumo de estado estacionário.

Regra de Ouro



Regra de Ouro

- Em estado estacionário:

$$c^* = (1 - s)f(k^*) = f(k^*) - sf(k^*)$$

- Sabe-se que $sf(k^*) = (\delta + n)k^*$. Logo:

$$c^* = f(k^*) - (\delta + n)k^*$$

- Deve-se encontrar primeiro o estoque de capital por trabalhador de estado estacionário que gera consumo máximo (k_g^*). Maximizando c^* com relação a k^* :

$$\left. \frac{dc^*}{dk^*} \right|_{k_g^*} = f'(k_g^*) - (\delta + n) = 0$$

$$f'(k_g^*) = \delta + n$$

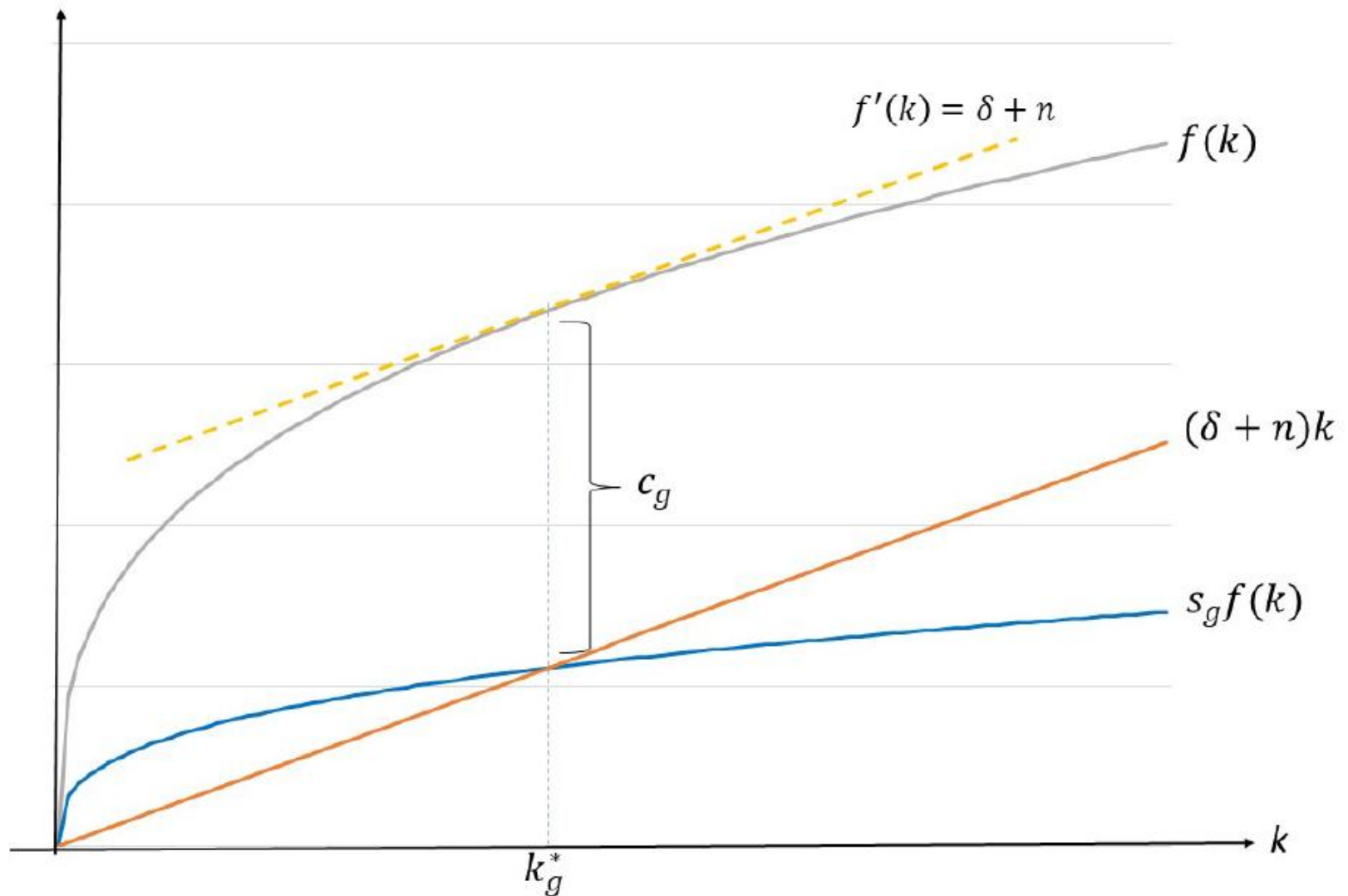
Regra de Ouro

- Agora, pode-se inferir a taxa de poupança (s_g) que induz esse nível de capital por trabalhador em estado estacionário:

$$s_g f(k_g^*) = (\delta + n)k_g^*$$

Regra de Ouro

Figure: Regra de ouro



Caso Cobb-Douglas

- Função de Produção Cobb-Douglas:

$$f(k_t) = A_t k_t^\alpha$$

- Encontrando o capital por trabalhador associado à regra de ouro: $f'(k_g^*) = A_t (k_g^*)^{\alpha-1} = \delta + n$

$$k_g^* = \left(\frac{A_t \alpha}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- Encontrando a taxa de poupança da regra de ouro:

$$s_g f(k_g^*) = (\delta + n) k_g^*$$
$$s_g = (\delta + n) \frac{k_g^*}{A_t (k_g^*)^\alpha} = \frac{\delta + n}{A_t} \frac{A_t \alpha}{\delta + n} = \alpha$$

Transições

- Suponha uma economia inicialmente em estado estacionário, com taxa de poupança $s > s_g$.
- No instante t_0 , taxa de poupança diminui para s_g .
- Capital e renda por trabalhador de estado estacionário são mais baixos. Mas ajuste não é imediato.
- ▶ Em t_0 , capital ainda está no nível inicial.
- ▶ Decai ao longo do tempo, pois com a taxa de poupança mais baixa, investimento $<$ depreciação (por trabalhador).
- ▶ No longo prazo, tende a k_g^*
- ▶ Produto por trabalhador segue caminho semelhante, pois $y_t = f(k_t)$

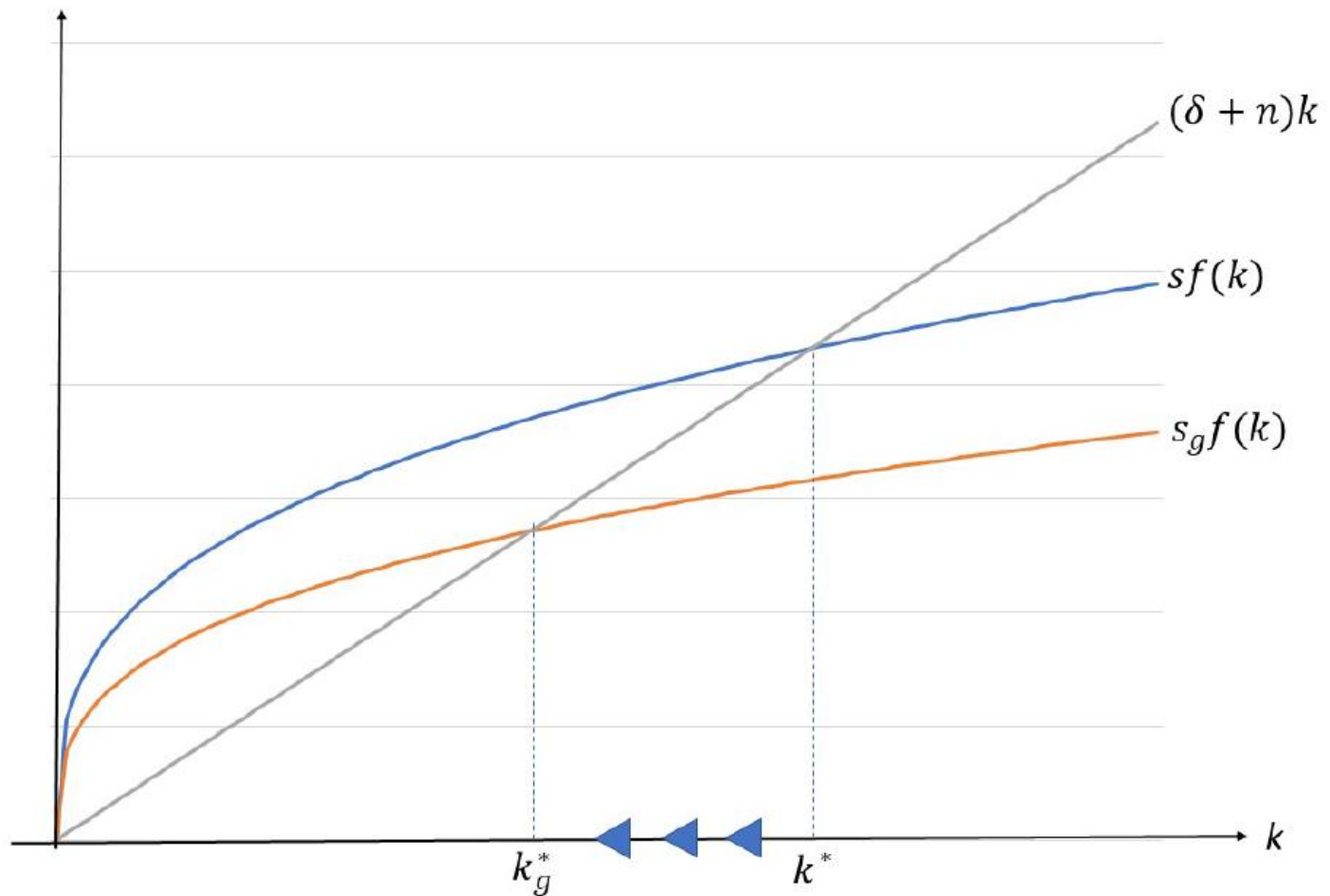
Transições

- Consumo por trabalhador aumenta no longo prazo.
 - ▶ Quando $s = s_g$, c^* é máximo.
- Mas em t_0 , consumo por trabalhador aumenta de maneira discreta: $c_t = (1 - s)f(k_t)$
 - ▶ Em t_0 , capital por trabalhador ainda está no nível anterior, mas a queda em s induz “salto” em c_t .
- A partir daí ($t > t_0$), c_t segue trajetória descendente (por conta da dinâmica do capital e do produto_)
 - ▶ Converge para $c_g^* > c^*$ no longo prazo.
- Trajetória inteira de consumo por trabalhador é mais alta, em comparação ao nível inicial.

Transições

Inicialmente $s > s_g$

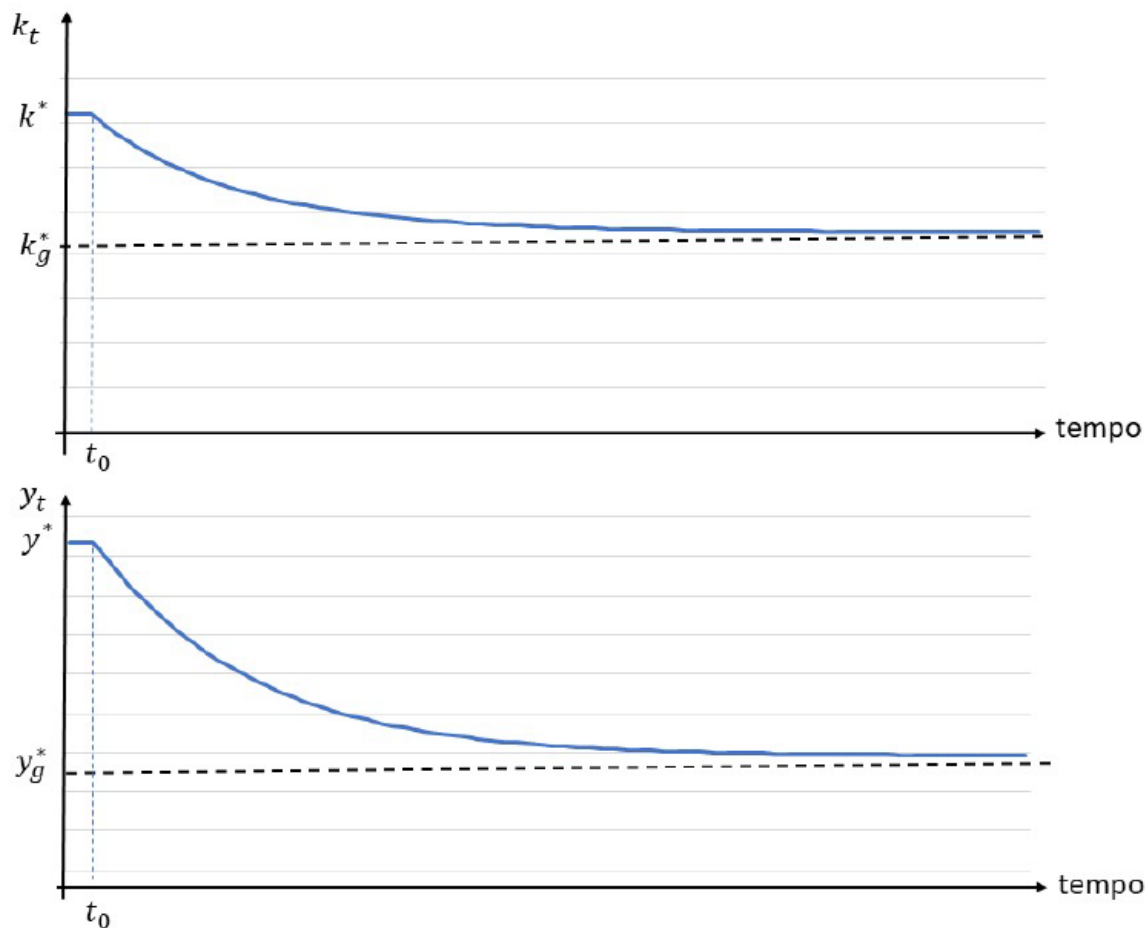
Figure: Redução na taxa de poupança de s para s_g



Transições

Inicialmente $s > s_g$

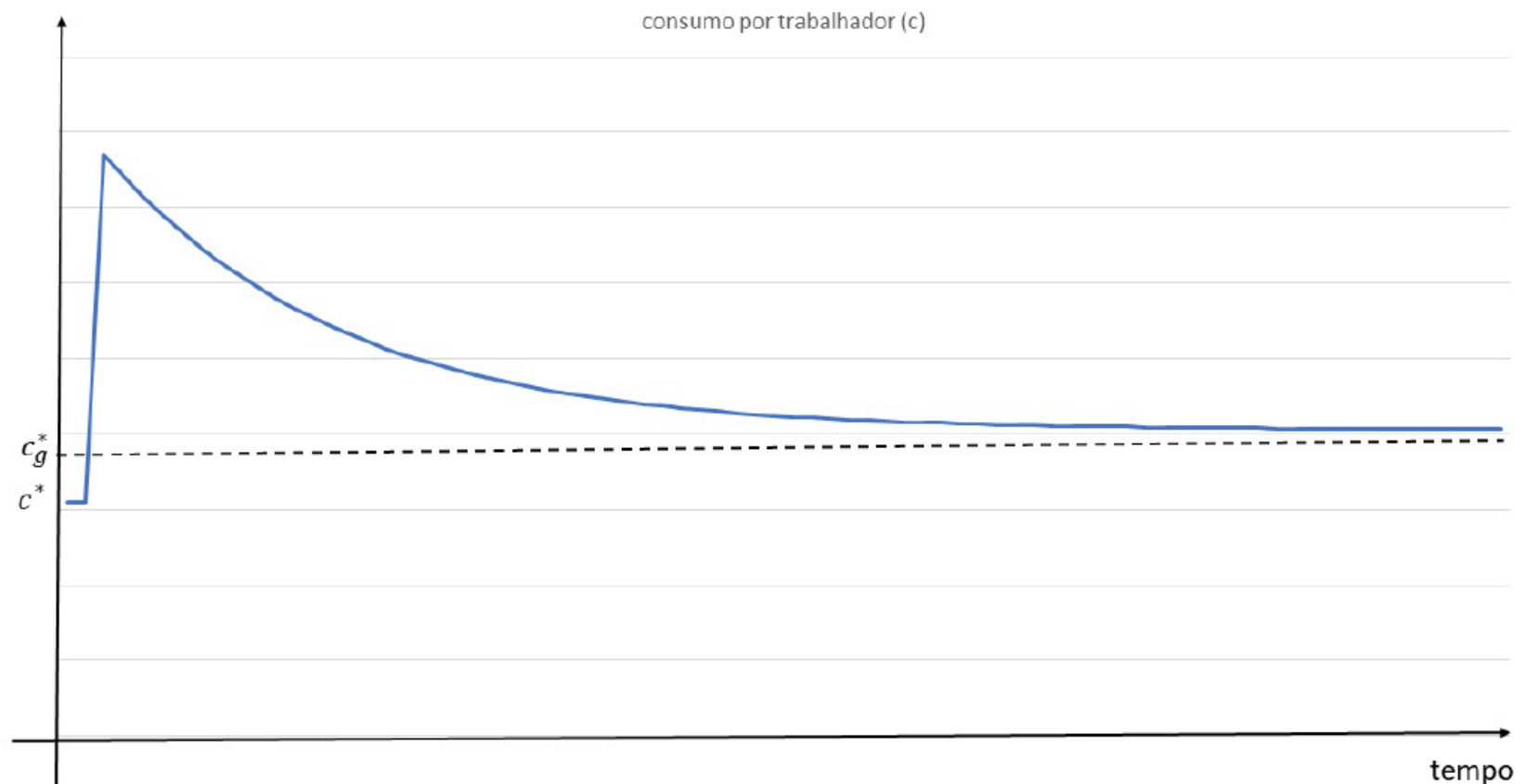
Figure: Redução na taxa de poupança de s para s_g



Transições

Inicialmente $s > s_g$

Figure: Redução na taxa de poupança de s para s_g



Transições

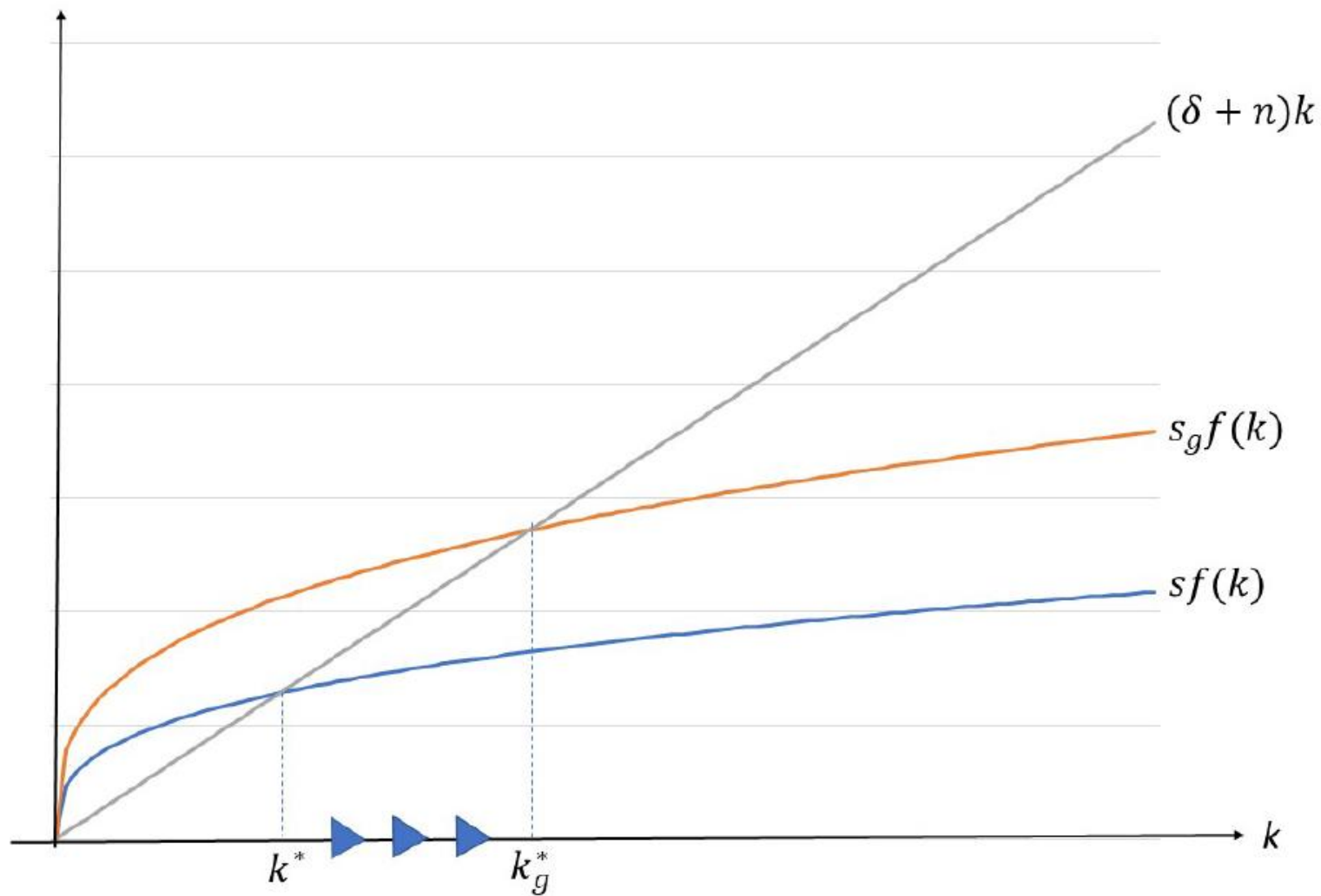
- Suponha agora uma economia com taxa de poupança menor que a da taxa de poupança da regra de ouro: $s < s_g$.
- No instante t_0 , a taxa de poupança aumenta para s_g
- Capital e renda por trabalhador de estado estacionário são mais altos. Mas esse ajuste não é imediato:
 - ▶ Em t_0 , capital ainda está no nível inicial
 - ▶ Cresce ao longo do tempo pois, com a taxa de poupança mais elevada, investimento $>$ depreciação (por trabalhador)
 - ▶ No longo prazo, tende para k_g^*
 - ▶ Produto por trabalhador segue caminho semelhante, pois $y_t = f(k_t)$

Transições

- Consumo por trabalhador aumenta no longo prazo.
 - ▶ Quando $s = s_g$, c^* é máximo.
- Mas em t_0 , consumo por trabalhador diminui de maneira discreta: $c_t = (1 - s)f(k_t)$
 - ▶ Em t_0 , capital por trabalhador ainda está no nível anterior, mas a queda em s induz “salto” para baixo em c_t .
- A partir daí ($t > t_0$), c_t segue trajetória ascendente (por conta da dinâmica do capital e produto).
 - ▶ Converge para $c_g^* > c^*$ no longo prazo.
- Em comparação ao nível inicial, consumo por trabalhador cai na transição, mas aumenta no longo prazo.

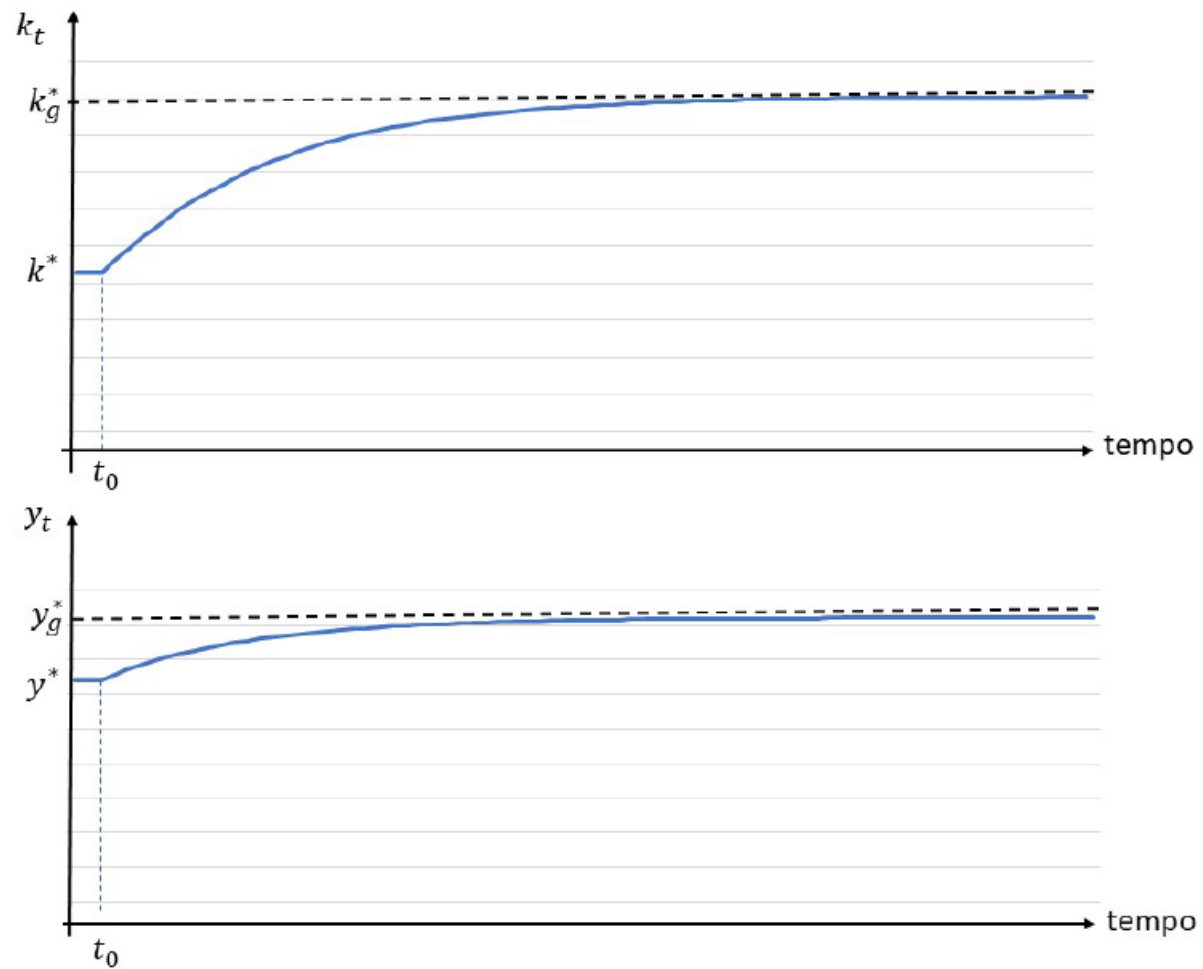
Inicialmente $s < s_g$

Figure: Aumento na taxa de poupança de s para s_g



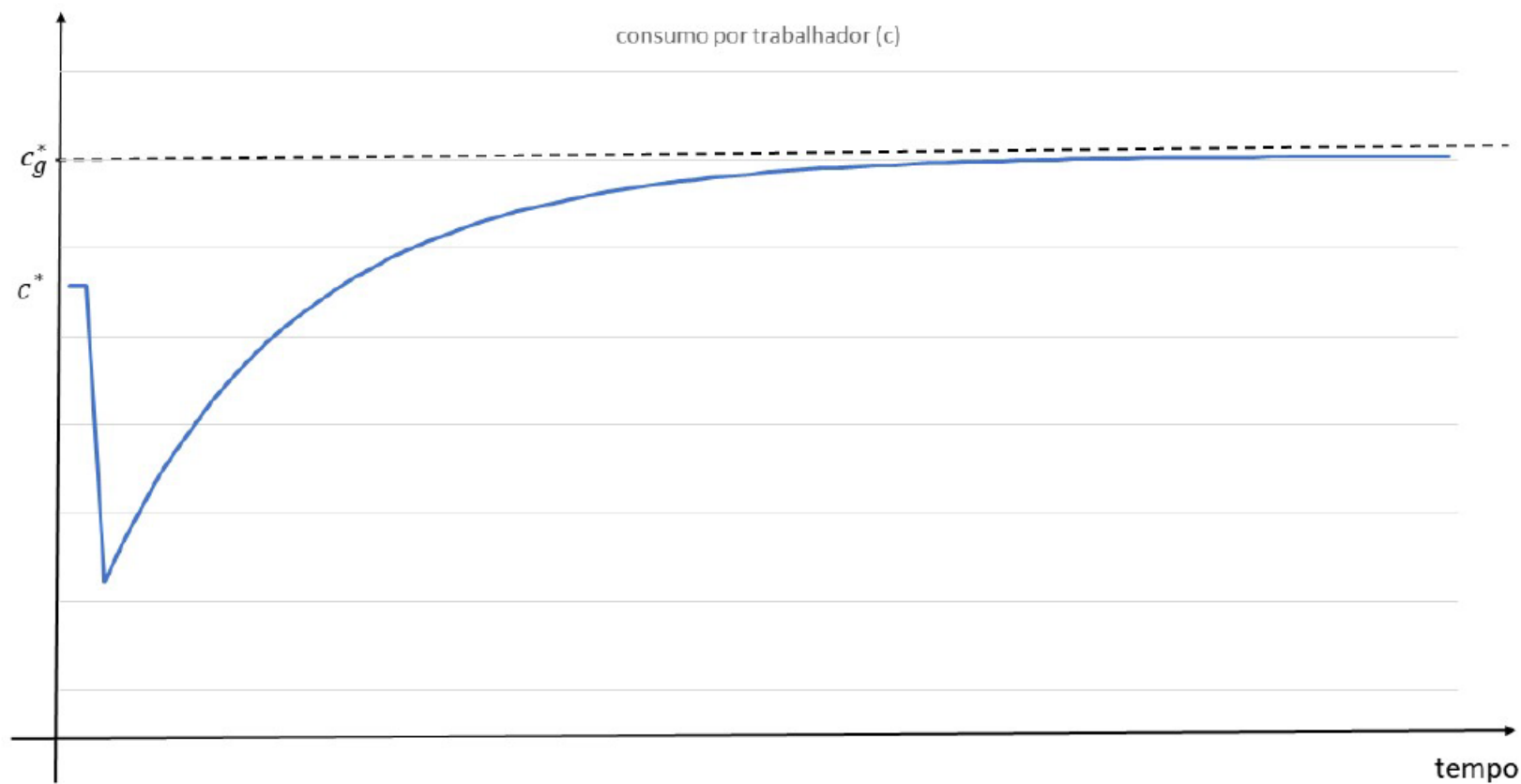
Inicialmente $s < s_g$

Figure: Aumento na taxa de poupança de s para s_g



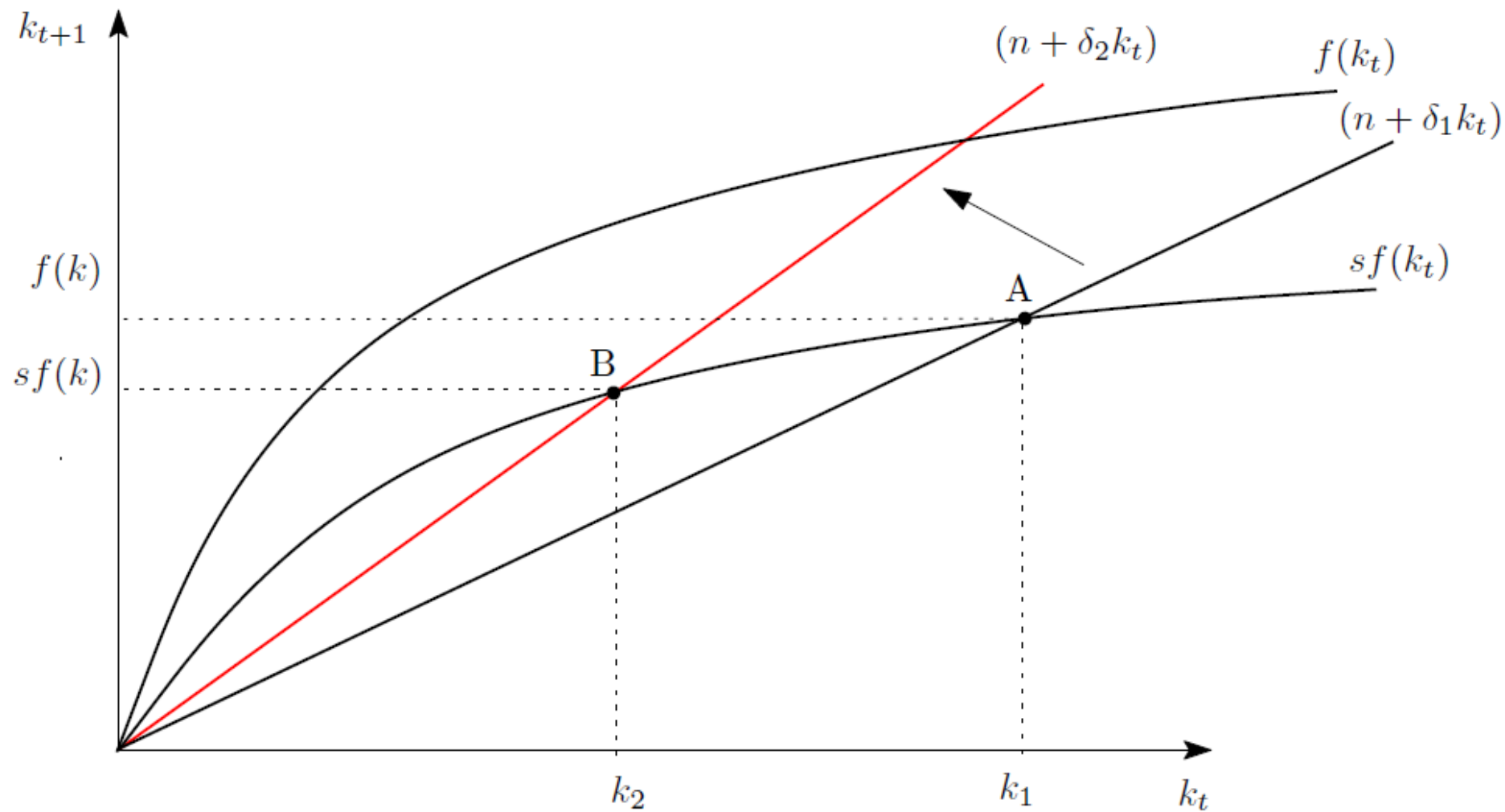
Inicialmente $s < s_g$

Figure: Aumento na taxa de poupança de s para s_g



**Modelo de Solow-Swan com Mudança
Populacional: $(\delta + n)k$**

Mudança na Taxa de Depreciação



**Modelo de Solow-Swan com Mudança
Populacional e Progresso Tecnológico:**
 $(\delta + n + g)k$

Progresso Tecnológico

- Modelo de Solow-Swan, até este momento, é incapaz de gerar crescimento econômico de longo prazo;
- Capital possui retornos marginais decrescentes;
- ▶ Possível crescer de maneira apenas transitória via acumulação do estoque de capital.
- Agora, deve-se introduzir progresso tecnológico exógeno.
- ▶ Economia consegue produzir, com a mesma quantidade de insumos, cada vez mais produtos.

Progresso Tecnológico

- Modelo de Crescimento Econômico Exógeno.
 - ▶ Modelo Solow-Swan gera crescimento econômico de longo prazo, como função do progresso tecnológico;
 - ▶ Progresso tecnológico, no entanto, não resulta dos mecanismos do modelo.

Progresso Tecnológico

- Tecnologia: $Y_t = F(K_t, A_t N_t)$
- $A_t N_t$: número de trabalhadores efetivos.
 - ▶ Número de trabalhadores (N_t) ajustados pela produtividade (A_t).
 - ▶ Progresso tecnológico = produtividade cada vez mais alta no tempo.
- Cada trabalhador capaz de produzir cada vez mais, para dado estoque de capital K_t .
- Progresso tecnológico: A_t cresce à taxa g .

$$\frac{\dot{A}_t}{A_t} = g$$

Progresso Tecnológico

- Resto do modelo permanece como antes;
- Função de Produção satisfaz retornos constantes de escala com relação a K_t e $A_t N_t$: $\lambda Y_t = F(\lambda K_t, \lambda A_t N_t), \forall \lambda > 0$.
- Em particular, para $\lambda = 1/(A_t N_t)$:

$$\frac{Y_t}{A_t N_t} = F\left(\frac{K_t}{A_t N_t}, 1\right) \Rightarrow \tilde{y}_t = F(\tilde{k}_t, 1)$$

$\tilde{y}_t$: produto por trabalhador efetivo;

$\tilde{k}_t$: capital por trabalhador efetivo.

- Defina $F(\tilde{k}_t, 1) = f(\tilde{k}_t)$. Produto por trabalhador efetivo é então: $\tilde{y}_t = f(\tilde{k}_t)$

Progresso Tecnológico

- Função de Produção satisfaz também as condições de Inada:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial (A_t N_t)} > 0, \quad \underbrace{\frac{\partial Y_t}{\partial K_t}}_{=f'(\tilde{k}_t)} > 0$$

$$\frac{\partial^2 F(K_t, N_t)}{\partial (A_t N_t)^2} = \frac{\partial^2 Y_t}{\partial (A_t N_t)^2} \frac{\partial PM_g K}{\partial k} < 0$$

$$\frac{\partial^2 F(K_t, N_t)}{\partial (K_t)^2} = \frac{\partial^2 Y_t}{\partial (K_t)^2} \frac{\partial PM_g K}{\partial k} < 0$$

Progreso Tecnológico

$$\lim_{K_t \rightarrow 0} \left[\frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial (K_t)} \right] = \lim_{K \rightarrow 0} \left[\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} \right] = \lim_{K \rightarrow 0} PMgK_t \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{(A_t N_t) \rightarrow 0} \left[\frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial (A_t N_t)} \right] &= \lim_{(A_t N_t) \rightarrow 0} \left[\frac{\partial Y_t}{\partial (A_t N_t)} \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow 0} PMgA_t N_t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Se $A_t N_t \rightarrow 0$, $PMgA_t N_t \rightarrow \infty$

Se $K_t \rightarrow 0$, $PMgK_t \rightarrow \infty$

Progreso Tecnológico

$$\lim_{K_t \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial K_t} \right] = \lim_{K_t \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} \right] = \lim_{K_t \rightarrow \infty} PMgK_t \rightarrow 0$$

$$\lim_{(A_t N_t) \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial (A_t N_t)} \right] = \lim_{(A_t N_t) \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial Y_t}{\partial (A_t N_t)} \right]$$

$$= \lim_{(A_t N_t) \rightarrow \infty} PMg(A_t N_t) \rightarrow 0$$

Se $A_t N_t \rightarrow \infty$, $PMgA_t N_t \rightarrow 0$

Se $K_t \rightarrow \infty$, $PMgK_t \rightarrow 0$

Progresso Tecnológico

$$F(K_t, 0) = F(0, A_t N_t) = 0$$

Dadas as hipóteses sobre a função de produção:

$$f'(\tilde{k}_t) > 0$$

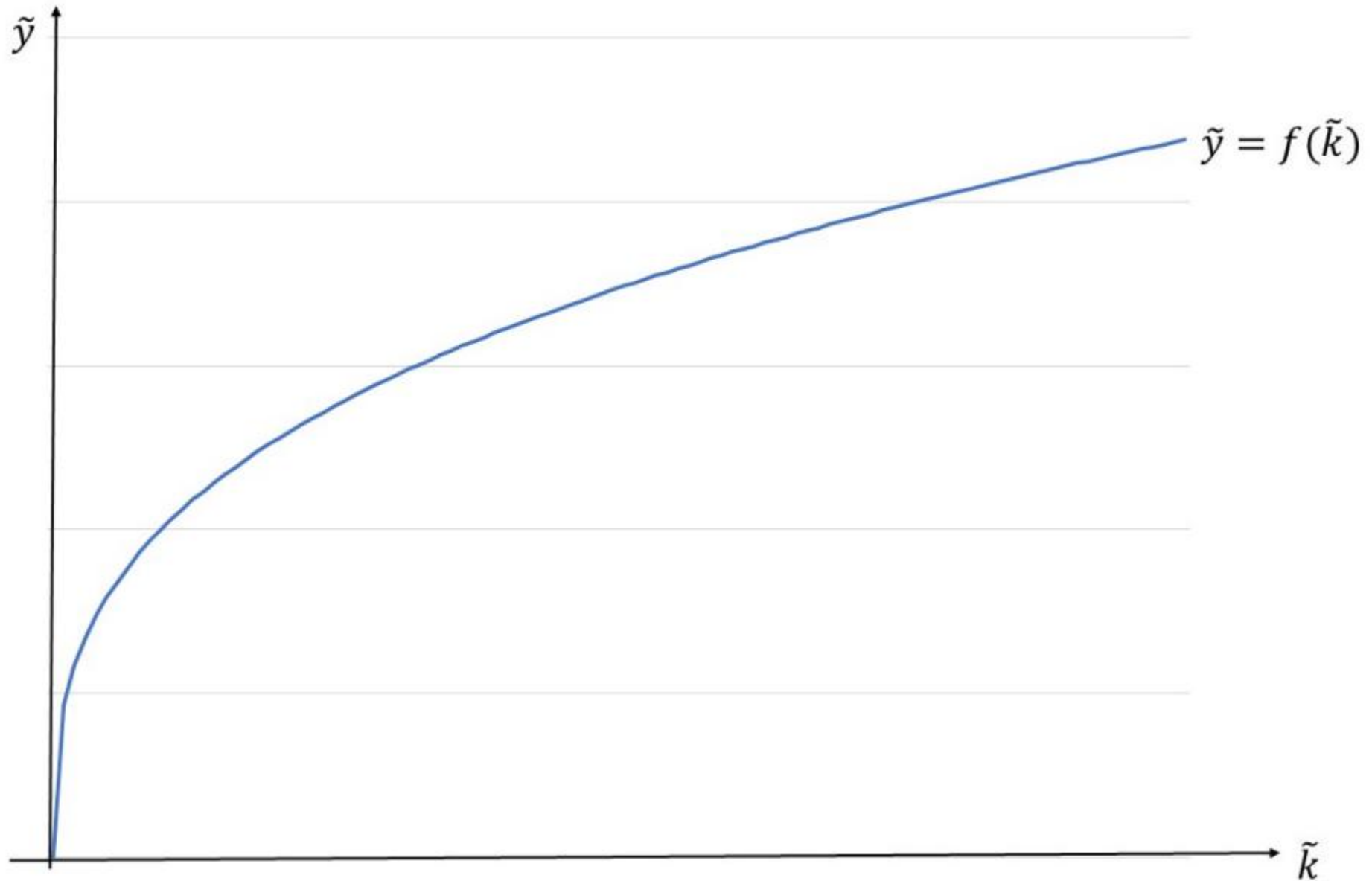
$$f''(\tilde{k}_t) < 0$$

$$f'(0) = \infty$$

$$f'(\infty) = 0$$

$$f(0) = 0$$

Função de Produção por trabalhador **efetivo**



Modelo de Solow-Swan

- Função de Produção neoclássica com as propriedades já discutidas:

$$Y_t = F(K_t, A_t N_t)$$

$$\tilde{y}_t = f(\tilde{k}_t)$$

- Economia fechada e sem governo: $Y_t = C_t + I_t$
- Fração exógena s da renda é poupada/investida:

$$S_t = I_t = sY_t$$

- ▶ Fração $(1 - s)$ é usada para consumo: $C_t = (1 - s)Y_t$
- ▶ $s \in (0,1)$: taxa de poupança

Modelo de Solow-Swan

- Acumulação de capital:

- ▶ Capital aumenta ao longo do tempo com investimento;

- ▶ Capital diminui ao longo do tempo por conta da depreciação:

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t$$

Modelo de Solow-Swan

- Crescimento populacional:

► População (e número de trabalhadores) cresce à taxa exógena n :

$$\frac{\dot{N}_t}{N_t} = n$$

- Progresso tecnológico:

$$\frac{\dot{A}_t}{A_t} = g$$

Lei de Movimento

- Lembrando que $\tilde{k}_t = K_t/(A_t N_t)$ e $\tilde{y}_t = Y_t/(A_t N_t) = f(\tilde{k}_t)$;
- Dividindo a equação de acumulação de capital por $A_t N_t$:

$$\dot{K}_t = sY_t - \delta K_t$$

$$\frac{\dot{K}_t}{A_t N_t} = s \left(\frac{Y_t}{A_t N_t} \right) - \delta \left(\frac{K_t}{A_t N_t} \right) = s f(\tilde{k}_t) - \delta \tilde{k}_t \quad (*)$$

Lei de Movimento

- Note que:

$$\dot{\tilde{k}}_t = \frac{d[K_t/(A_t N_t)]}{dt} = \frac{\dot{K}_t(A_t N_t) - K_t(\dot{A}_t N_t + A_t \dot{N}_t)}{(A_t N_t)^2}$$

$$= \frac{\dot{K}_t}{A_t N_t} - \frac{K_t}{A_t N_t} \left[\frac{\dot{A}_t N_t}{A_t N_t} + \frac{A_t \dot{N}_t}{A_t N_t} \right] = \frac{\dot{K}_t}{A_t N_t} - (n + g) \tilde{k}_t$$

- Logo:

$$\frac{\dot{K}_t}{A_t N_t} = \dot{\tilde{k}}_t + (n + g) \tilde{k}_t \quad (**)$$

Lei de Movimento

- Combinando (*) e (**):

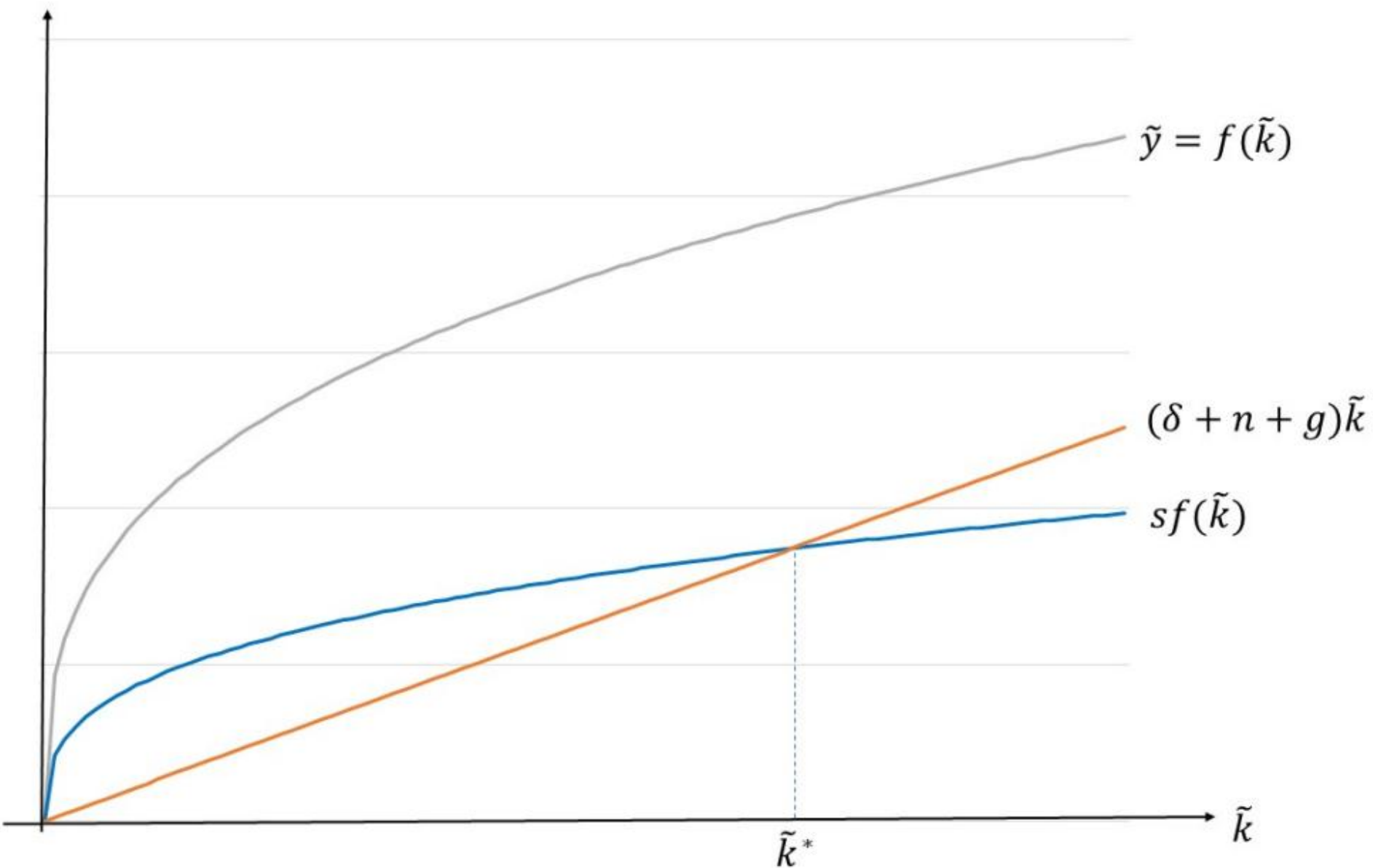
$$sf(\tilde{k}_t) - \delta\tilde{k}_t = \dot{\tilde{k}}_t + (n + g)\tilde{k}_t$$

- Pode-se obter a lei de movimento do capital por trabalhador efetivo:

$$\dot{\tilde{k}}_t = sf(\tilde{k}_t) - (\delta + n + g)\tilde{k}_t$$

Com base nessa equação, para dada condição inicial $\tilde{k}_0$, é possível obter toda a trajetória futura de $\tilde{k}_t$ e das demais variáveis endógenas do modelo.

Lei de Movimento e Estado Estacionário



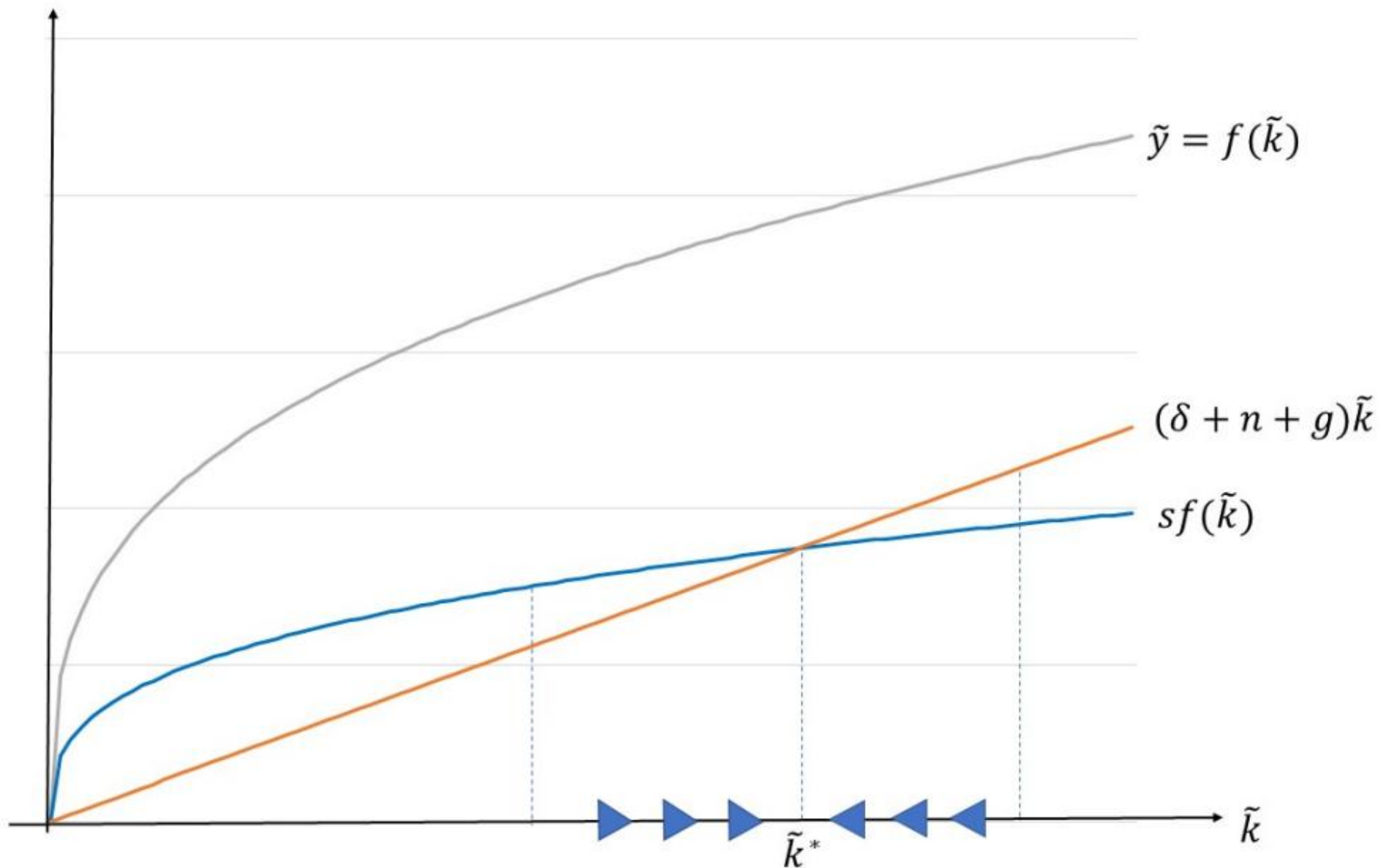
Estado Estacionário

- Em estado estacionário:

$$sf(\tilde{k}^*) = (\delta + n + g)\tilde{k}^*$$

- ▶ $\tilde{k}^*$: capital por trabalhador efetivo de estado estacionário.
- ▶ Investimento por trabalhador efetivo = depreciação por trabalhador efetivo (ajustando pelo crescimento populacional e progresso tecnológico).

Lei de Movimento e Estado Estacionário



Longo prazo

- Lembrando que $\tilde{k}_t = K_t/(A_t N_t)$ e $\tilde{y}_t = Y_t/(A_t N_t) = f(\tilde{k}_t)$

- Capital e produto por trabalhador:

$$k_t = \frac{K_t}{N_t} = A_t \tilde{k}_t$$

$$y_t = \frac{Y_t}{N_t} = A_t f(\tilde{k}_t)$$

Longo prazo

- No longo prazo, $\tilde{k}_t = \tilde{k}^*$:

$$k_t = A_t \tilde{k}^*$$

$$y_t = A_t f(\tilde{k}^*)$$

- Portanto, no longo prazo, capital e renda por trabalhador crescem à taxa de progresso tecnológico g .

► O mesmo vale para outras variáveis por trabalhador.

- Com a introdução de progresso tecnológico, modelo é capaz de gerar crescimento econômico de longo prazo.

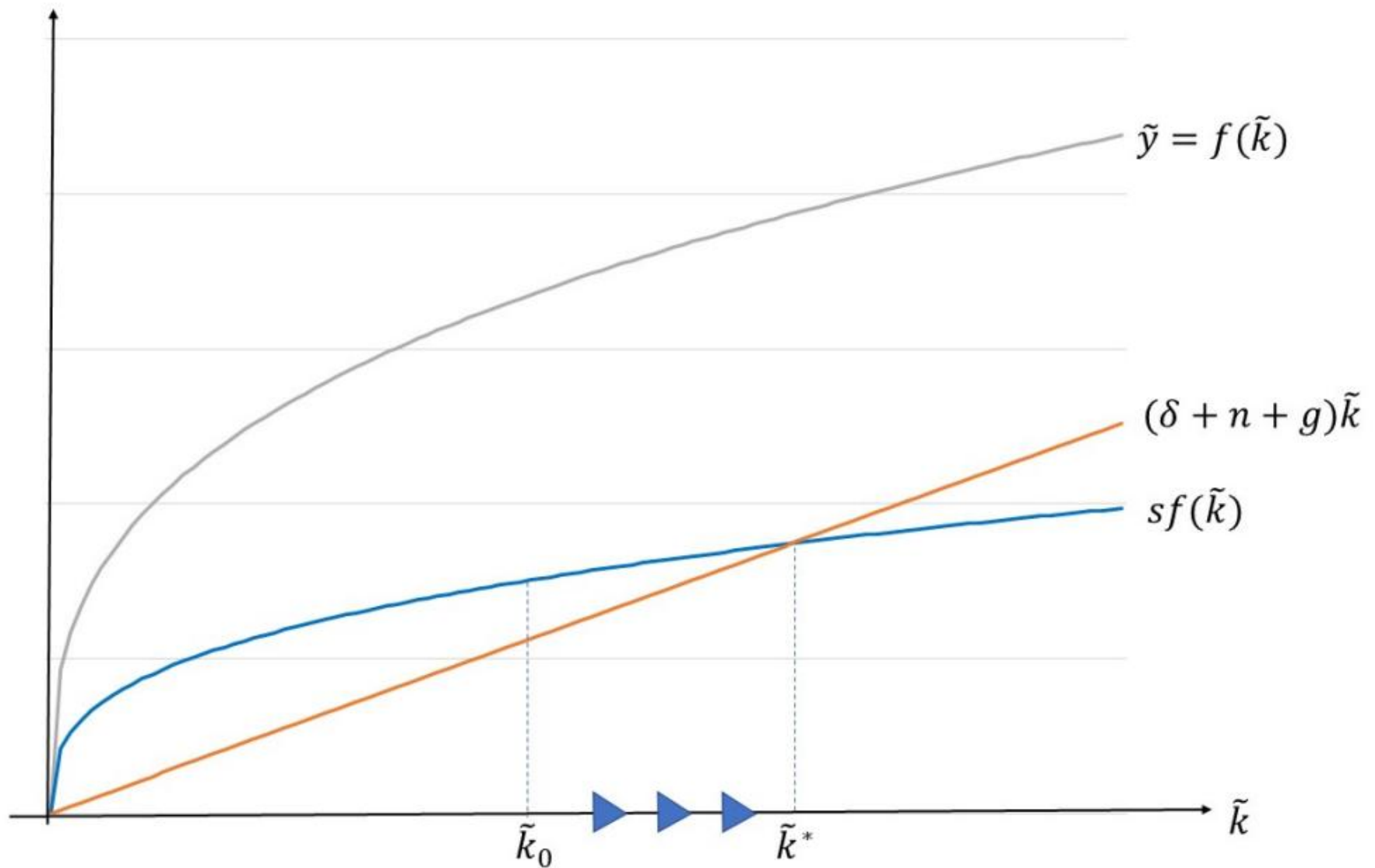
► Progresso tecnológico.

Dinâmica

- Suponha capital por trabalhador efetivo inicial abaixo do nível de estado estacionário: $\tilde{k}_0 < \tilde{k}^*$
- Nessa situação, investimento $>$ depreciação (por trabalhador efetivo)
 - ▶ Capital por trabalhador efetivo cresce ao longo do tempo ($\dot{\tilde{k}}_t > 0$);
 - ▶ Inicialmente, crescimento econômico é elevado, pois $\tilde{k}_t$ é baixo e PMgK é alta;
 - ▶ À medida que o capital acumula, PMgK diminui e taxa de crescimento se reduz.
 - ▶ No longo prazo, $\tilde{k}_t \rightarrow \tilde{k}^*$

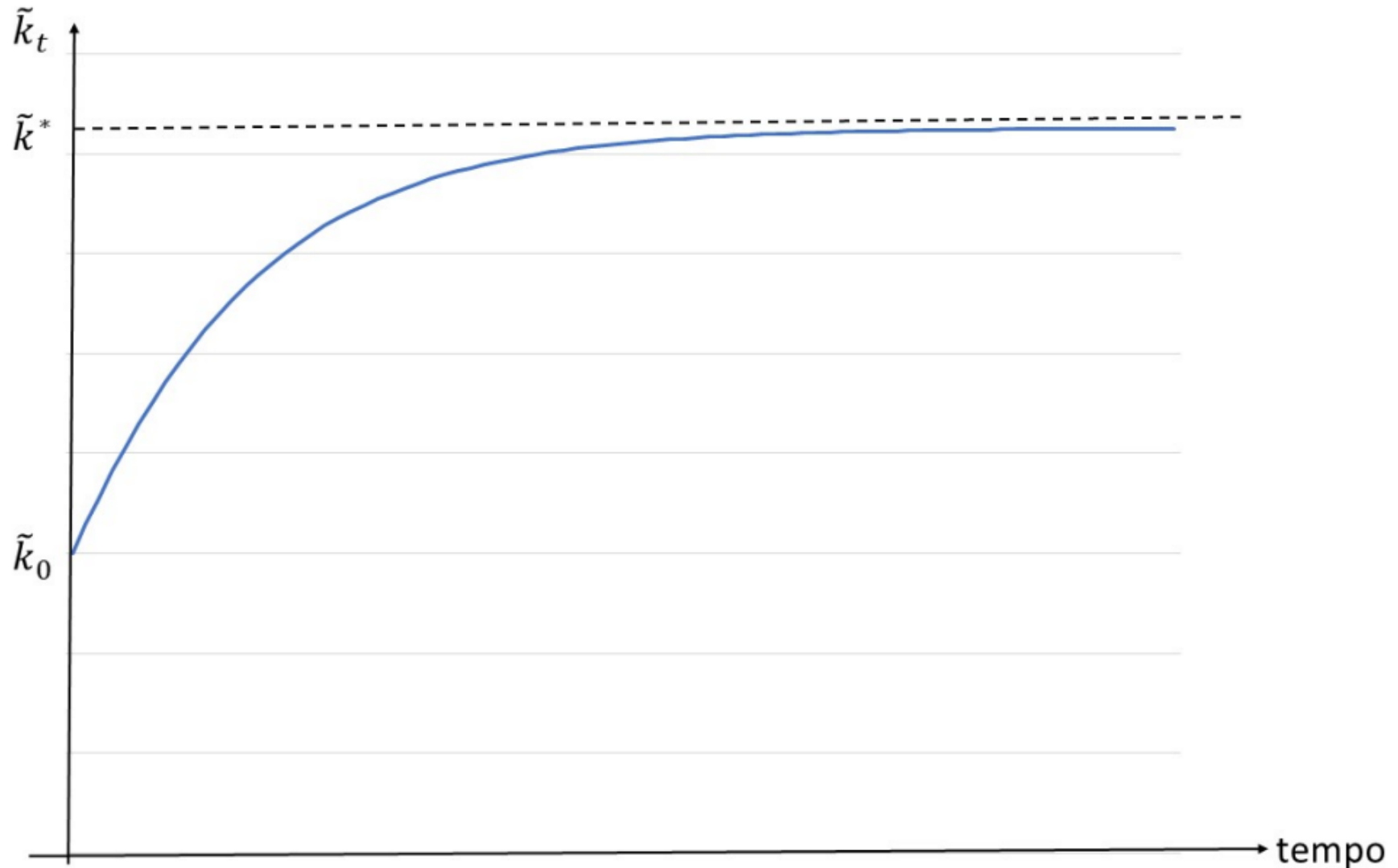
Dinâmica

Figure: $\tilde{k}_0 < \tilde{k}^*$



Dinâmica

Figure: Trajetória do capital por trabalhador efetivo ($\tilde{k}_0 < \tilde{k}^*$)



Dinâmica

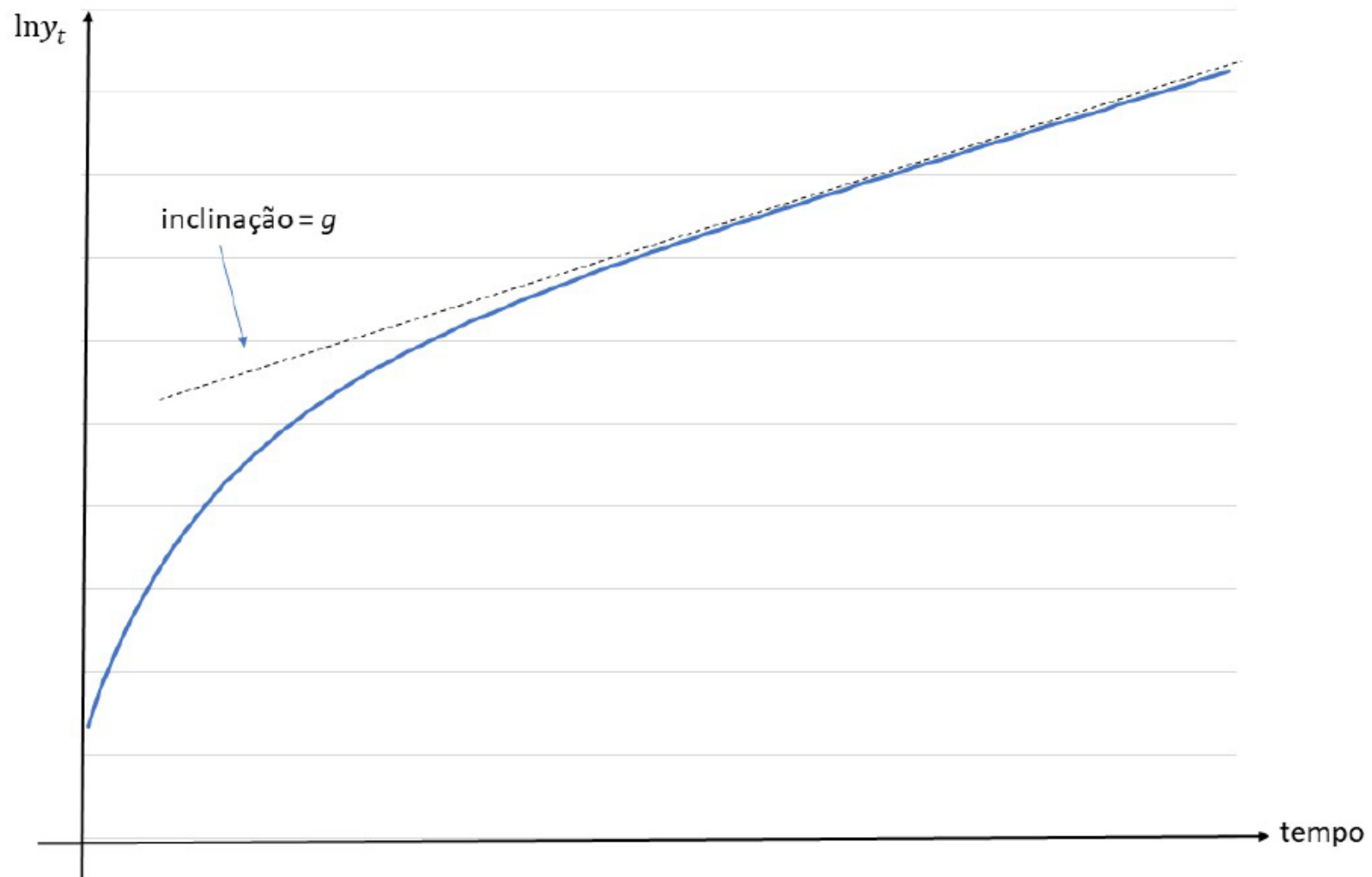
- Produto por trabalhador efetivo segue trajetória semelhante.
- Produto por trabalhador:

$$y_t = A_t f(\tilde{k}_t)$$

- ▶ Cresce a uma taxa superior a g na transição.
- ▶ Essa taxa diminui ao longo do tempo, à medida que PMgK se reduz.
- ▶ No longo prazo, a taxa de crescimento tende a g .

Dinâmica

Figure: Trajetória da renda por trabalhador ($\tilde{k}_0 < \tilde{k}^*$)

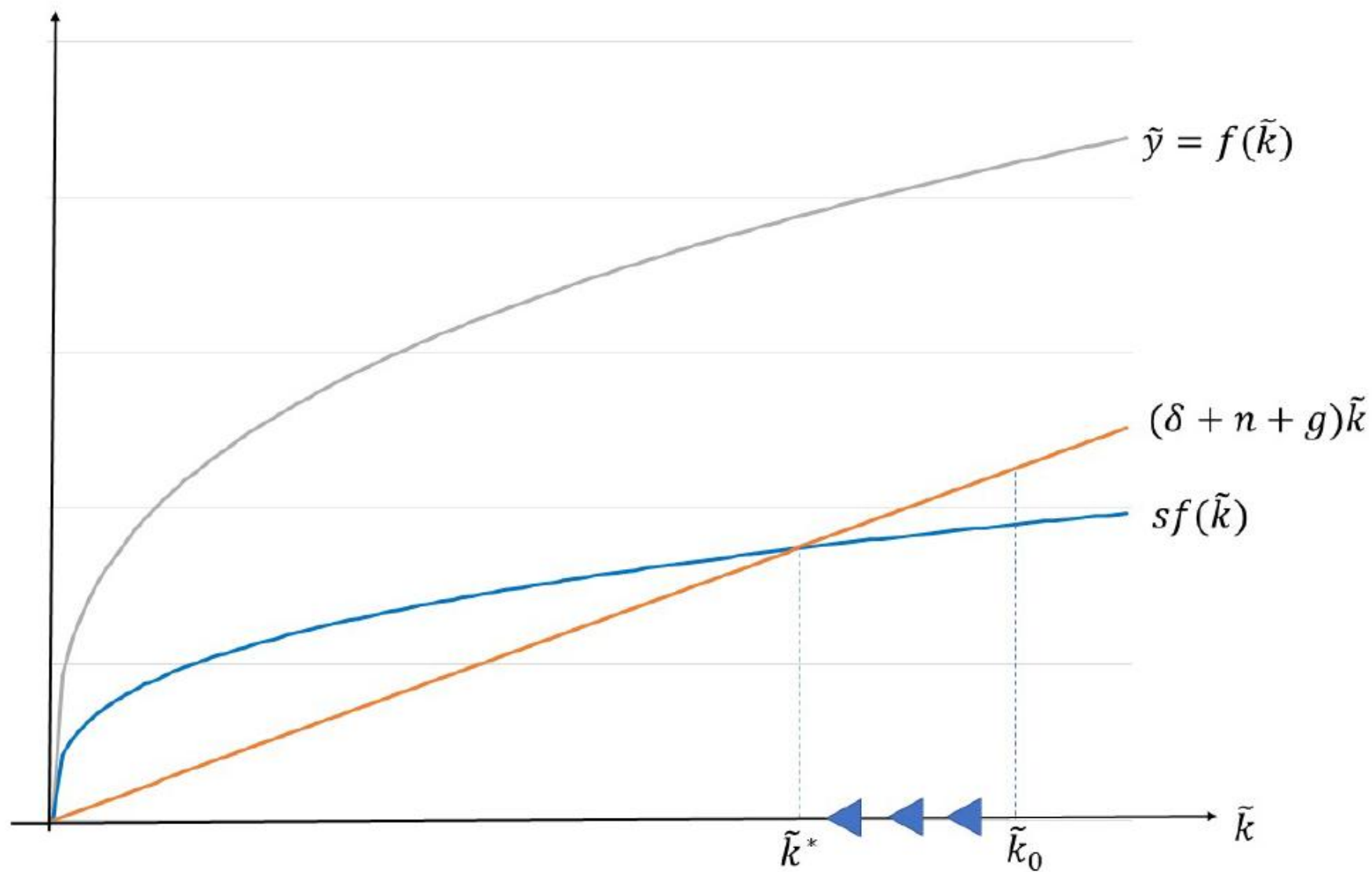


Dinâmica

- Suponha capital por trabalhador efetivo inicial acima do nível de estado estacionário: $\tilde{k}_0 > \tilde{k}^*$
- Nessa situação, investimento < depreciação (por trabalhador efetivo)
 - ▶ Capital por trabalhador efetivo decresce ao longo do tempo ($\dot{\tilde{k}}_t < 0$);
 - ▶ Inicialmente, crescimento econômico é baixo, pois $\tilde{k}_t$ é elevado e PMgK é baixa;
 - ▶ À medida que o capital desacumula, PMgK aumenta e taxa de decrescimento se reduz.
 - ▶ No longo prazo, $\tilde{k}_t \rightarrow \tilde{k}^*$

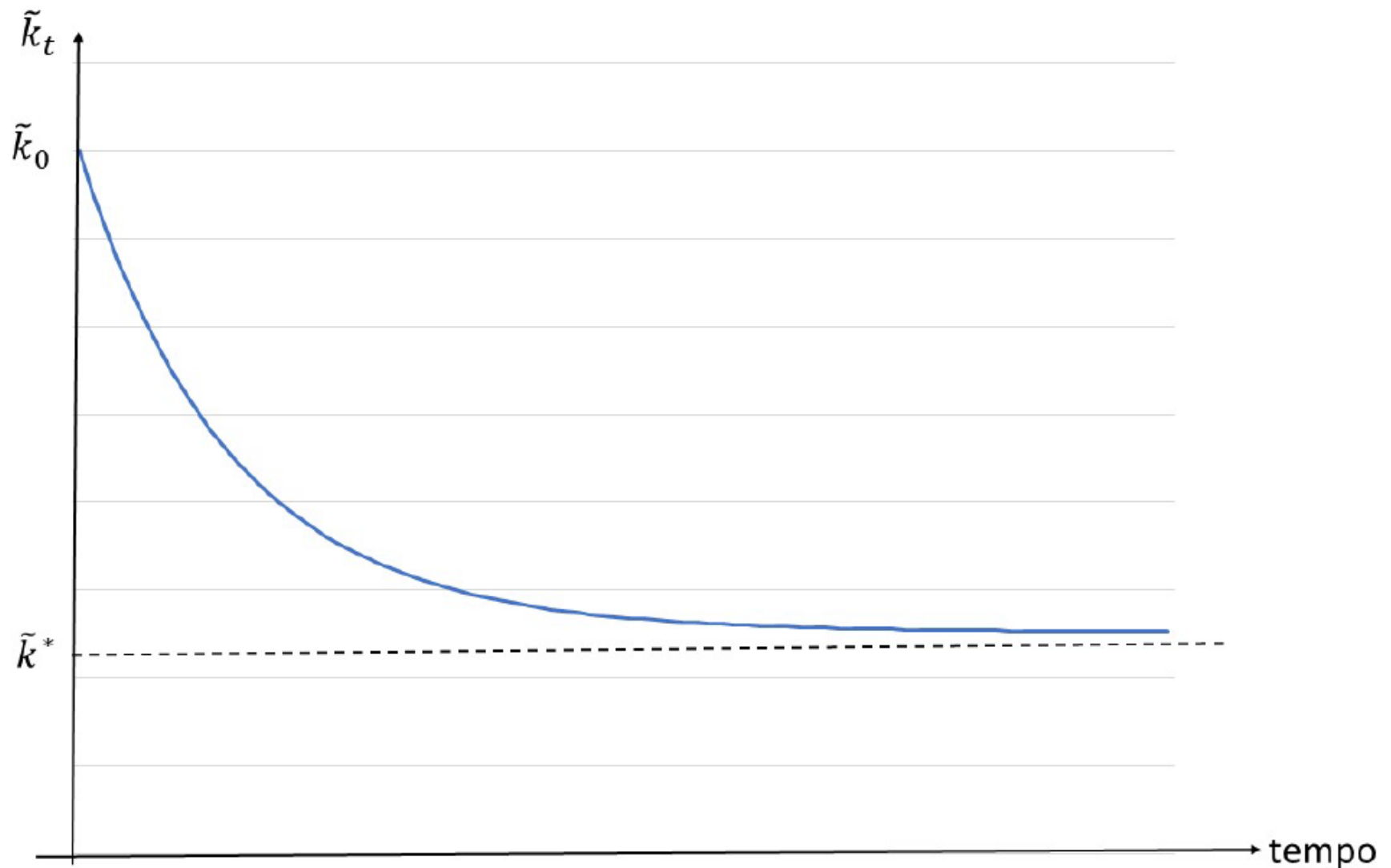
Dinâmica

Figure: $\tilde{k}_0 > \tilde{k}^*$



Dinâmica

Figure: Trajetória do capital por trabalhador efetivo ($\tilde{k}_0 > \tilde{k}^*$)



Dinâmica

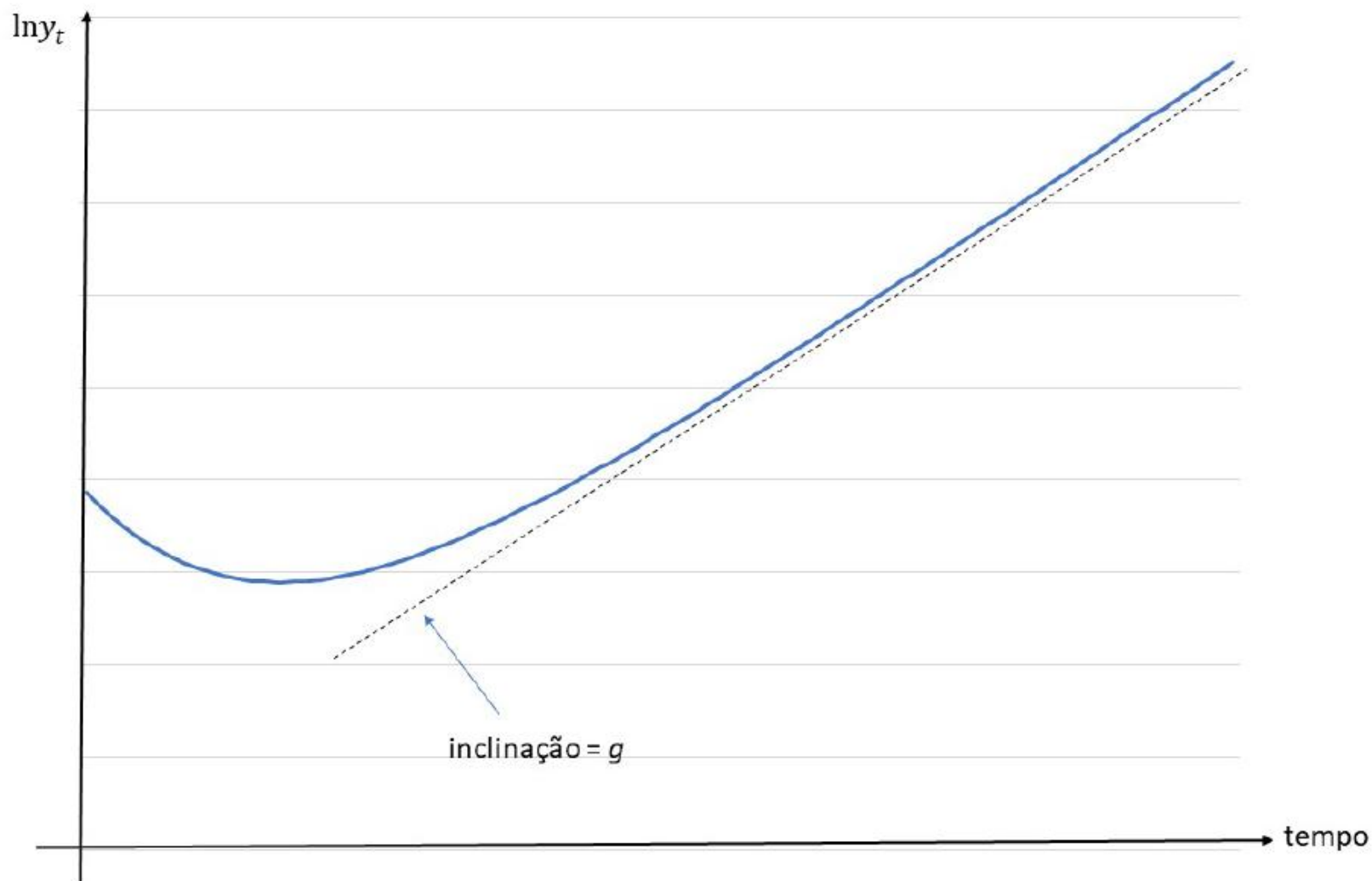
- Produto por trabalhador efetivo segue trajetória semelhante.
- Produto por trabalhador:

$$y_t = A_t f(\tilde{k}_t)$$

- ▶ Cresce a uma taxa inferior a g na transição.
- ▶ Essa taxa aumenta ao longo do tempo, à medida que PMgK cresce.
- ▶ No longo prazo, a taxa de crescimento tende a g .

Dinâmica

Figure: Trajetória da renda por trabalhador ($\tilde{k}_0 > \tilde{k}^*$)



Caso Cobb-Douglas

- $F(K_t, N_t) = K_t^\alpha (A_t N_t)^{1-\alpha}; f(\tilde{k}_t) = \tilde{k}_t^\alpha$

- Em estado estacionário:

$$sf(\tilde{k}^*) = (\delta + n + g)\tilde{k}^*$$

$$s(\tilde{k}^*)^\alpha = (\delta + n + g)\tilde{k}^*$$

- Logo:

$$\frac{k^*}{(\tilde{k}^*)^\alpha} = (\tilde{k}^*)^{1-\alpha} = \frac{s}{\delta + n + g}$$

Caso Cobb-Douglas

- Capital por trabalhador efetivo de estado estacionário:

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{\delta + n + g} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- Produto por trabalhador efetivo de estado estacionário:

$$y^* = (\tilde{k}^*)^\alpha = \left(\frac{s}{\delta + n + g} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Caso Cobb-Douglas

- Produto por trabalhador de estado estacionário: $y_t = A_t \tilde{y}^*$
- Dado que $\dot{A}_t/A_t = g$: $A_t = A_0 e^{gt}$
- Portanto:

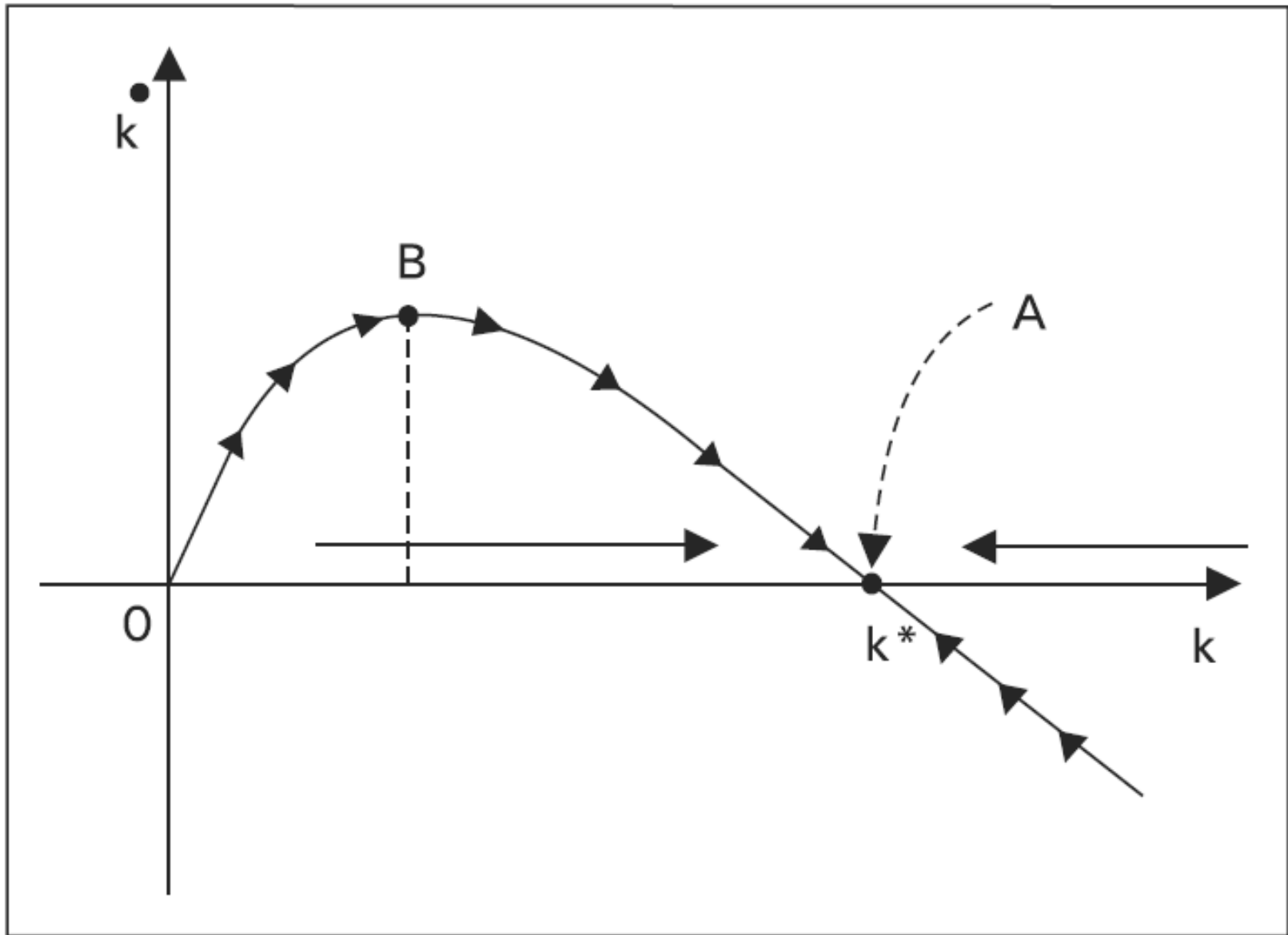
$$y_t = \left(\frac{s}{\delta + n + g} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_0 e^{gt}$$

- ▶ Nível de renda por trabalhador:

$$\left(\frac{s}{\delta + n + g} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

- ▶ Taxa de crescimento: g

Progresso Tecnológico



Mudança de estado estacionário

- Alterar algum parâmetro do modelo ajuda a entender a diferença entre efeitos de nível e de taxa.
- ▶ Revisita o caso de mudança na taxa de poupança
- Suponha a economia inicialmente em estado estacionário com taxa de poupança s_A .
- ▶ Capital por trabalhador efetivo $\tilde{k}_A^*$; produto por trabalhador efetivo $\tilde{y}_A^* = f(\tilde{k}_A^*)$
- ▶ No instante t_0 , a taxa de poupança aumenta permanentemente para s_B .

Mudança de estado estacionário

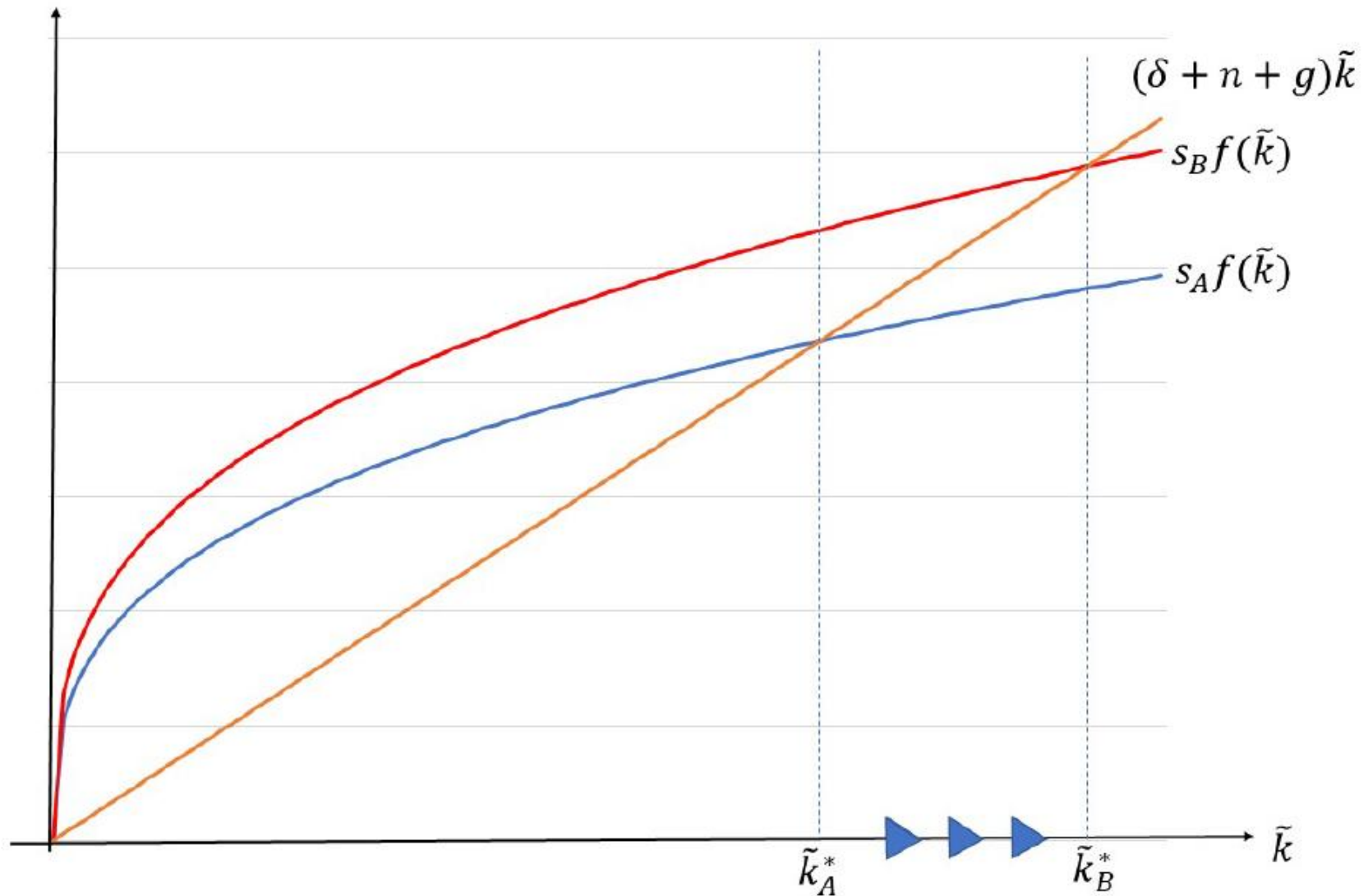
- Nível do produto por trabalhador aumenta permanentemente.
- Taxa de crescimento eleva-se temporariamente:
 - ▶ Mas diminui à medida que a economia se aproxima do estado estacionário.
 - ▶ Retorna a g no longo prazo.

**Modelo de Solow-Swan com Mudança
Populacional e Progresso Tecnológico:**
 $(\delta + n + g)k$

Aumento na Taxa de Poupança (s)

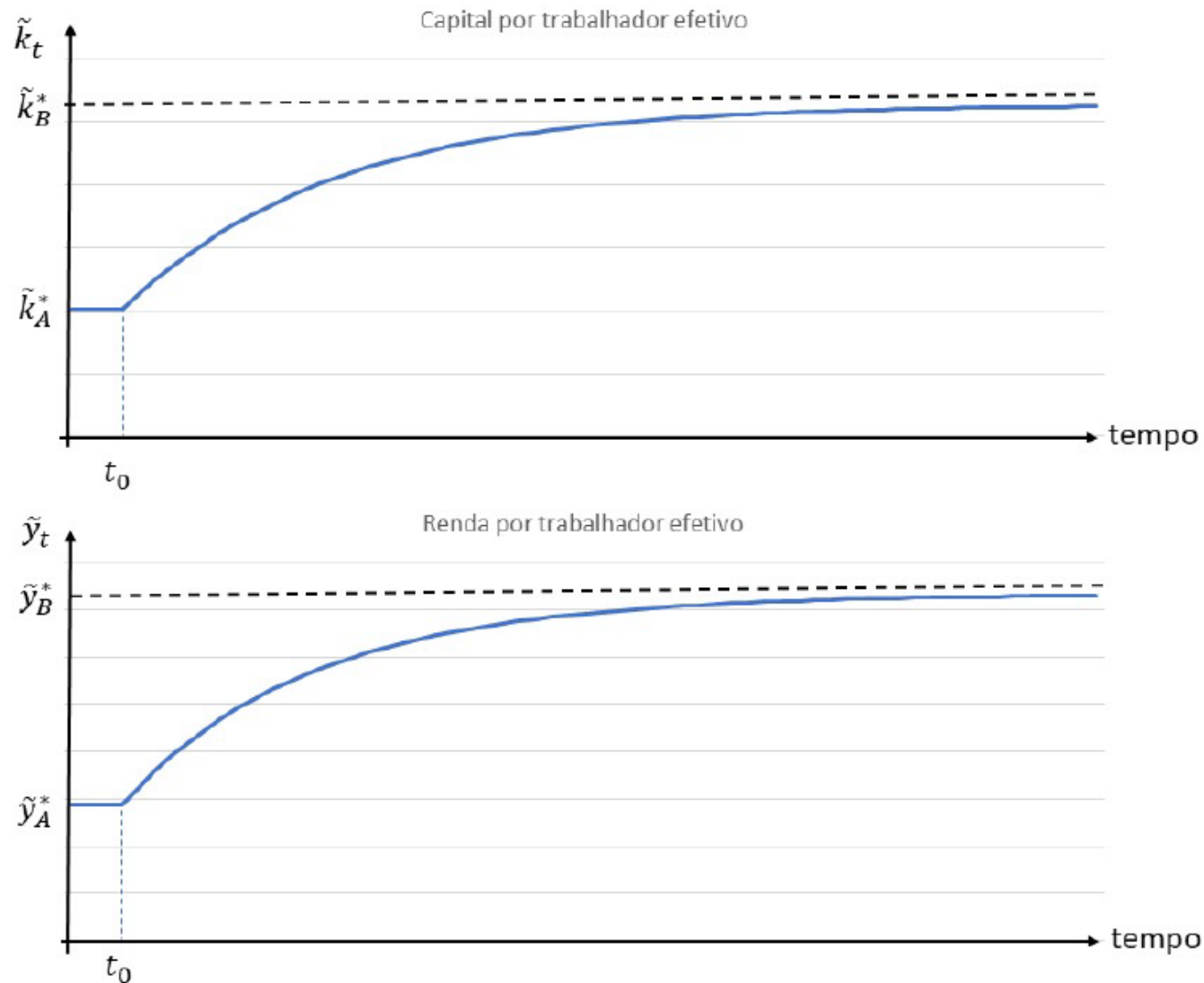
Aumento na taxa de poupança

Figure: Aumento na taxa de poupança



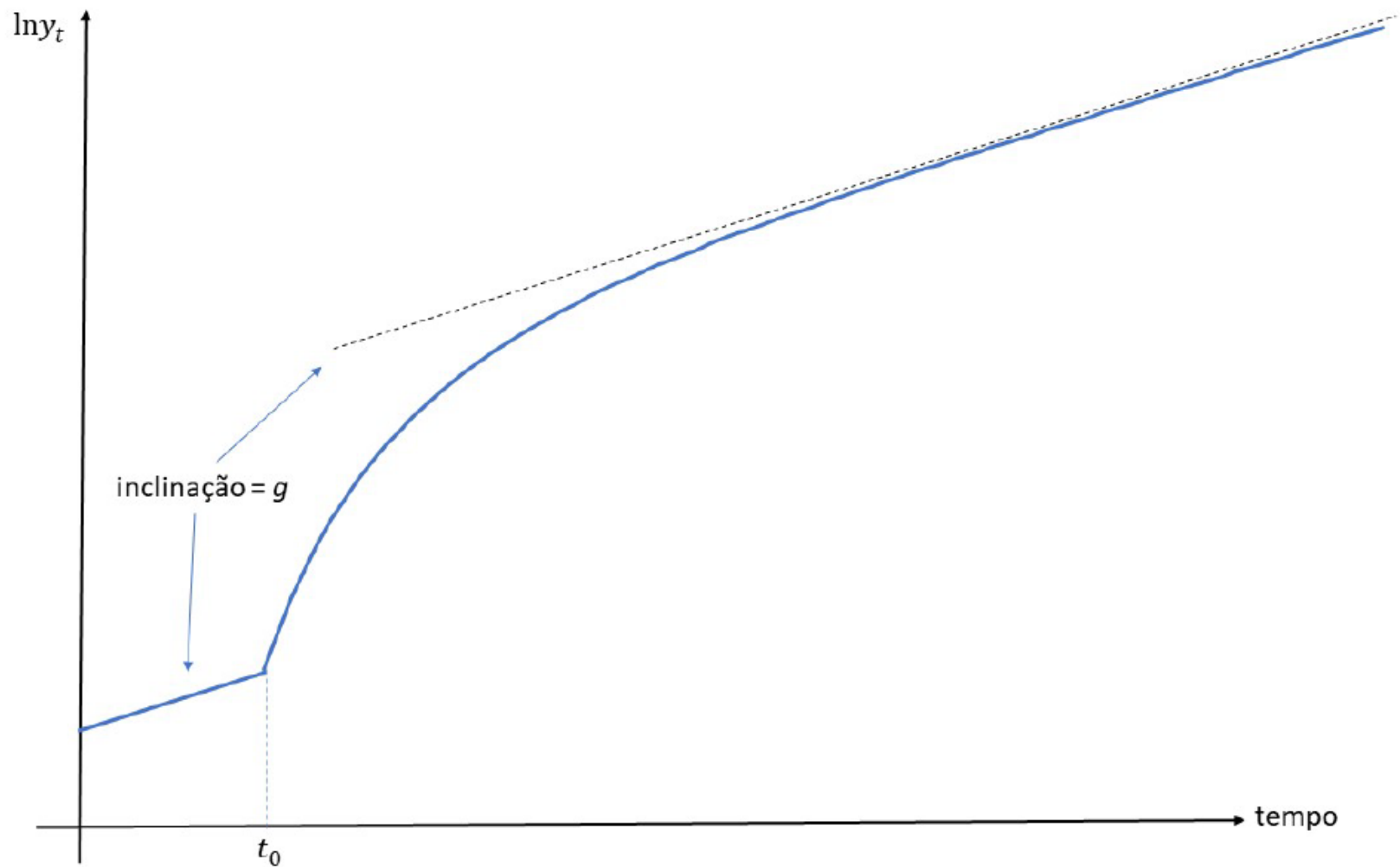
Aumento na taxa de poupança

Figure: Capital e renda por trabalhador efetivo



Aumento na taxa de poupança

Figure: Renda por trabalhador



Modelo de Solow-Swan: Premissas e Equações

Crescimento e Desenvolvimento Econômico

Crescimento Econômico de Longo Prazo

Crescimento e desenvolvimento econômico

$\partial y / \partial k < 0 \Rightarrow$ economias menos desenvolvidas (isto é, economias com menor estoque de capital, k) crescem a taxas maiores, tudo o mais constante.

$\partial \gamma / \partial s = y/k > 0$ e $\partial \gamma / \partial \delta = \partial \gamma / \partial n < 0 \Rightarrow$ uma maior taxa de poupança (s) e/ou uma menor taxa de depreciação (δ) geram maior crescimento do estoque de capital (γ).

O crescimento da produtividade (isto é, maior μ) aumenta a produção e y/k . Como $\partial y / \partial (y/k) = s > 0$, tem-se um maior crescimento do estoque de capital (γ).

Crescimento e desenvolvimento econômico

Vetores de Crescimento Econômico:

Países desenvolvidos: geralmente possuem maior taxa de poupança e de progresso tecnológico (produtividade)

Países em desenvolvimento: geralmente possuem maior taxa decrescimento populacional.

Modelo de Solow-Swan: Premissas e Equações

Crescimento e Desenvolvimento Econômico

Crescimento Econômico de Longo Prazo

Crescimento de Longo Prazo

$$\frac{\Delta y_{t+1}}{y_t} = \frac{\Delta Y_{t+1}}{Y_t} - \frac{\Delta N_{t+1}}{N_t}$$

$$= \mu + \alpha \left[\frac{\Delta K_{t+1}}{K_t} - \frac{\Delta N_{t+1}}{N_t} \right]$$

$$= \mu + \alpha \left[\frac{\Delta k_{t+1}}{k_t} \right]$$

$$= \mu + \alpha \left[s \left(\frac{y_t}{k_t} \right) - (\delta + n) \right]$$

$$= \mu + \alpha \gamma$$

Como $c_t = (1 - s)$, tem-se que $(\Delta c_{t+1}/c_t) = (\Delta y_{t+1}/y_t)$

Crescimento de Longo Prazo

$$\frac{\Delta y_{t+1}}{y_t} = \frac{\Delta c_{t+1}}{c_t} = \mu + \alpha y$$

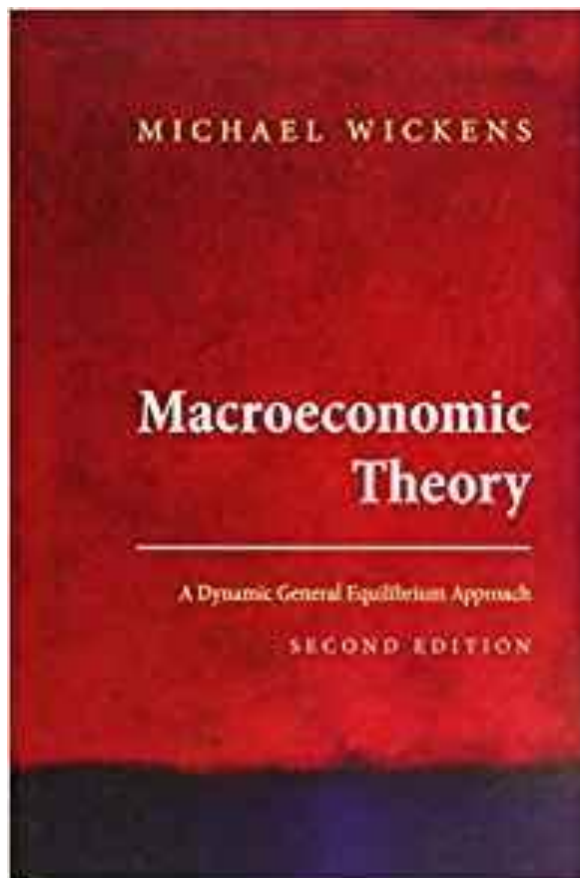
$$\frac{\Delta k_{t+1}}{k_t} = \gamma$$

Como $(\Delta y_{t+1}/y_t) = (\Delta c_{t+1}/c_t) = (\Delta k_{t+1}/k_t)$, tem-se que:

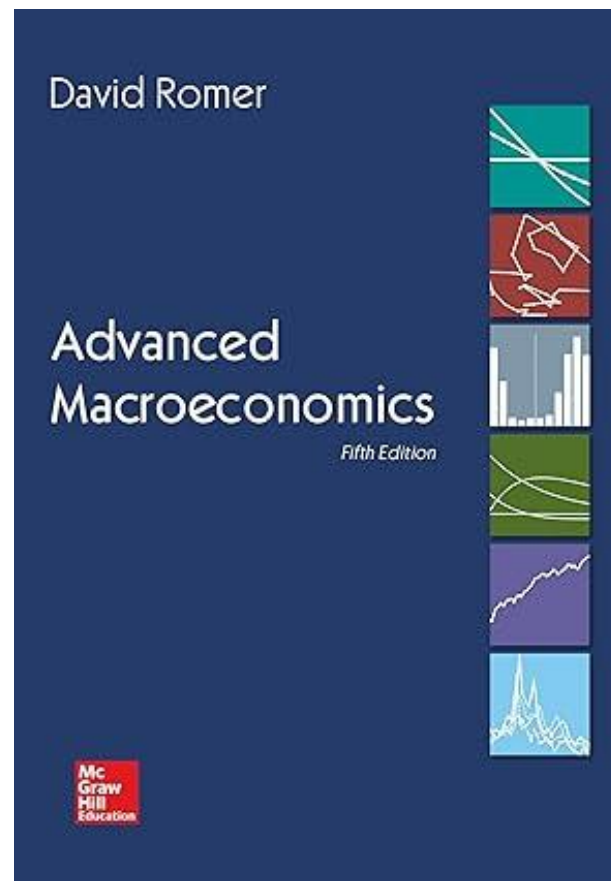
$$\gamma = \frac{\mu}{1 - \alpha}$$

Em outras palavras, só existe crescimento econômico de longo prazo se houver progresso tecnológico.

Referências bibliográficas



Capítulo 3



Capítulo 1

Referências bibliográficas

RODRIGUES, M. **Curso de Teoria Macroeconômica.** Universidade de São Paulo, 2021.

COSTA FILHO. J. R. **Macroeconomia Dinâmica.** Curso de Capacitação. Brasília, 2024.

Obrigado!

Contato:

PROF. DR. SÉRGIO RICARDO DE BRITO GADELHA

E-mail: sergio.gadelha@idp.edu.br e professor.sergio.Gadelha@gmail.com

Sítio eletrônico: <https://sergiorbgadelha.com.br/>