



MACROECONOMIA AVANÇADA

4ª Lista de Exercícios



20 DE OUTUBRO DE 2025

SÉRGIO RICARDO DE BRITO GADELHA

Programa de Doutorado e Mestrado Profissional em Economia, Políticas Públicas e
Desenvolvimento – Instituto Brasileiro de Ensino, Desenvolvimento e Pesquisa (IDP)

01 – No modelo de crescimento com acumulação de capital humano, o indivíduo (trabalhador) acumula capital humano no período t segundo a seguinte função: $h_t = \phi(k_{t+1}/k_t)$, onde h_t são as horas que ele trabalha em t (normalizadas de 0 a 1), k_t é a capacidade de produção (capital humano) por unidade de tempo em t , e k_{t+1} é a capacidade de produção (capital humano) por unidade de tempo em $t + 1$. A função ϕ é decrescente e existe um valor máximo $\lambda \in (0,1)$ e um valor mínimo $\delta \in (0,1)$ de taxas de variação do capital humano, ou seja, $\phi(1 + \lambda) = 0$ e $\phi(1 - \delta) = 1$. A produção total (e, portanto, o consumo) do indivíduo em t é $c_t = f(k_t h_t)$, onde $f(\cdot)$ é a função de produção. Se a utilidade em cada período do indivíduo é $U(\cdot)$ e o fator de desconto é $\beta \in (0,1)$, então resolve as seguintes questões:

(a) Escreva o problema do indivíduo e sua equação de Bellman associada (valor = 0,5 ponto).

Solução:

$$U(c) = c \text{ e } f(L) = L^{1/2}$$

Mas $c = f(L)$, de modo que $c = L^{1/2}$.

$$\text{Logo, } U(c) = L^{1/2}$$

$$\text{Mas } c_t = f(k_t h_t) \Rightarrow c_t = f(L) \Rightarrow L = k_t h_t$$

$$L = k_t h_t \Rightarrow L = k_t \phi\left(\frac{k_{t+1}}{k_t}\right)$$

Ou seja,

$$c_t = f(k_t h_t) \Rightarrow c_t = f\left[\underbrace{k_t \phi\left(\frac{k_{t+1}}{k_t}\right)}_L\right]$$

Contudo, $f(L) = L^{1/2}$. Mas, como $U(c) = L^{1/2}$, então:

$$U(c_t) = \left[k_t \phi\left(\frac{k_{t+1}}{k_t}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Problema do Indivíduo:

$$\text{Max } E_0 \left\{ \beta^t \sum_{t=0}^{\infty} U(c_t) \right\} \Rightarrow \text{Max } E_0 \left\{ \beta^t \sum_{t=0}^{\infty} \left[k_t \phi\left(\frac{k_{t+1}}{k_t}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Equação de Bellman:

$$v(k) = \underset{(1-\delta)k \leq y \leq (1+\lambda)k}{Max} \left\{ k_t^{1/2} \phi^{1/2} \left(\frac{k_{t+1}}{k_t} \right) + \beta v(k_t) \right\}$$

Ou

$$v(k) = \underset{(1-\delta)k \leq y \leq (1+\lambda)k}{Max} \left\{ k_t^{1/2} \phi^{1/2} \left(\frac{y}{k} \right) + \beta v(y) \right\}$$

Em que $y = k_{t+1}$.

(b) Resolva a equação de Bellman (ou seja, encontre a função valor e a função política ótima) para a seguinte especificação dos parâmetros e funções: $U(c) = c$; $f(L) = L^{1/2}$; $\lambda = \delta = 1$; ϕ é uma função linear; $\beta = 3/8$. (valor = 1,0 ponto)

Solução:

(b.1)

$$v_0(k) = 0$$

(b.2)

$$v_1(k) = \underset{(1-\delta)k \leq y \leq (1+\lambda)k}{Max} \left\{ k_t^{1/2} \phi^{1/2} \left(\frac{y}{k} \right) + \beta \underbrace{v_0(y)}_{=0} \right\}$$

$$v_1(k) = \underset{(1-\delta)k \leq y \leq (1+\lambda)k}{Max} \left\{ k_t^{1/2} \phi^{1/2} \left(\frac{y}{k} \right) \right\}$$

$$v_1(k) = \underset{(1-\delta) \leq \frac{y}{k} \leq (1+\lambda)}{Max} \left\{ k_t^{1/2} \phi^{1/2} \left(\frac{y}{k} \right) \right\}$$

$$\text{Se } \phi(1 + \lambda) = 0$$

$$\text{Se } \phi(1 - \delta) = 1 \Rightarrow v_1(k) = k_t^{1/2} \Rightarrow v_1(y) = y^{1/2}$$

(b.3)

$$v_2(k) = \underset{(1-\delta)k \leq y \leq (1+\lambda)k}{Max} \left\{ k_t^{1/2} \phi^{1/2} \left(\frac{y}{k} \right) + \beta \underbrace{v_1(y)}_{=y^{1/2}} \right\}$$

$$v_2(k) = \underset{(1-\delta)\frac{y}{k} \leq \frac{y}{k} \leq (1+\lambda)}{Max} \left\{ k_t^{1/2} \phi^{1/2} \left(\frac{y}{k} \right) + \beta y^{1/2} \right\}$$

Se $t = y/k$, então:

$$v_2(k) = \underset{(1-\delta) \leq t \leq (1+\lambda)}{Max} \left\{ k_t^{1/2} \phi^{1/2} \left(\frac{y}{k} \right) + \beta y^{1/2} \right\}$$

$$v_2(k) = k_t^{1/2} \underset{(1-\delta) \leq t \leq (1+\lambda)}{Max} \left\{ \frac{k_t^{1/2} \phi^{1/2} \left(\frac{y}{k} \right)}{k_t^{1/2}} + \beta \frac{y^{1/2}}{k_t^{1/2}} \right\}$$

$$v_2(k) = k_t^{1/2} \underset{(1-\delta) \leq t \leq (1+\lambda)}{Max} \left\{ \phi^{1/2}(t) + \beta \frac{y^{1/2}}{k_t^{1/2}} \right\}$$

$$v_2(k) = k_t^{1/2} \underset{(1-\delta) \leq t \leq (1+\lambda)}{Max} \left\{ \phi^{1/2}(t) + \beta \left(\frac{y}{k} \right)^{1/2} \right\}$$

$$v_2(k) = k_t^{1/2} \underset{(1-\delta) \leq t \leq (1+\lambda)}{Max} \left\{ \phi^{1/2}(t) + \beta (t)^{1/2} \right\}$$

$$v_2(k) = k_t^{1/2} \underbrace{\underset{(1-\delta) \leq t \leq (1+\lambda)}{Max} \left\{ \phi^{1/2}(t) + \beta (t)^{1/2} \right\}}_{A_2}$$

$$v_2(k) = A_2 k_t^{1/2}$$

$$v_2(k) = A_2 y^{1/2}$$

(b.4)

$$v_3(k) = \underset{(1-\delta)k \leq y \leq (1+\lambda)k}{Max} \left\{ k_t^{1/2} \phi^{1/2} \left(\frac{y}{k} \right) + \beta \underbrace{v_2(y)}_{=A_2 y^{1/2}} \right\}$$

$$v_3(k) = \underset{(1-\delta) \frac{y}{k} \leq (1+\lambda)}{Max} \left\{ k_t^{1/2} \phi^{1/2} \left(\frac{y}{k} \right) + \beta A_2 y^{1/2} \right\}$$

Se $t = y/k$, então:

$$v_3(k) = \underset{(1-\delta) \leq t \leq (1+\lambda)}{Max} \{ k_t^{1/2} \phi^{1/2}(t) + \beta A_2 y^{1/2} \}$$

$$v_3(k) = k_t^{1/2} \underset{(1-\delta) \leq t \leq (1+\lambda)}{Max} \left\{ \frac{k_t^{1/2} \phi^{1/2}}{k_t^{1/2}}(t) + \beta A_2 \frac{y^{1/2}}{k_t^{1/2}} \right\}$$

$$v_3(k) = k_t^{1/2} \underset{(1-\delta) \leq t \leq (1+\lambda)}{Max} \left\{ \phi^{1/2}(t) + \beta A_2 \frac{y^{1/2}}{k_t^{1/2}} \right\}$$

$$v_3(k) = k_t^{1/2} \underset{(1-\delta) \leq t \leq (1+\lambda)}{Max} \left\{ \phi^{1/2}(t) + \beta A_2 \left(\frac{y}{k} \right)^{1/2} \right\}$$

$$v_3(k) = k_t^{1/2} \underset{(1-\delta) \leq t \leq (1+\lambda)}{Max} \{ \phi^{1/2}(t) + \beta A_2 (t)^{1/2} \}$$

$$v_3(k) = k_t^{1/2} \underbrace{\underset{(1-\delta) \leq t \leq (1+\lambda)}{Max} \{ \phi^{1/2}(t) + \beta A_2 (t)^{1/2} \}}_{A_3}$$

$$v_3(k) = A_3 k_t^{1/2}$$

...

$$v_n(k) = A_n k^{1/2}$$

$$v_n(y) = A_n k^{1/2}$$

Função Política Ótima:

$$g(k) = Arg \underbrace{Max_{(1-\delta) \leq t \leq (1+\lambda)} \{\phi^{1/2}(t) + \beta A(t)^{1/2}\}}_{t^*}$$

$$t^* = \frac{y^*}{k} \Rightarrow y^* = t^* k \Rightarrow g(k) = t^* k$$

02 – Um modelo de ciclos reais de negócios com custos de ajustamento para o investimento. Considere o seguinte modelo onde a família representativa resolve:

$$\max_{\{k_{t+1}, c_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t \right\}$$

Sujeito a:

$$c_t + k_{t+1} = z_t k_t^\theta \bar{n}^{1-\theta} - \frac{\phi}{2} (k_{t+1} - k_t)^2$$

$$c_t, k_{t+1} \geq 0$$

k_0 é dado

Onde c_t e k_t representam consumo e capital. Quanto ao nível tecnológico, z_t é representada pelo seguinte processo estocástico exógeno:

$$\ln(z_t) = (1 - \rho) \ln(\bar{z}) + \rho \ln(z_{t-1}) + \varepsilon_t$$

Com $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ e $0 \leq \rho < 1$. A oferta de trabalho é exógena e normalizada para ser igual a um ($\bar{n} = 1$). O termo $\bar{z}$ é o valor de z_t no estado estacionário. Os termos β , θ e ϕ são parâmetros, com $0 < \beta < 1$, $0 < \theta < 1$ e $\phi \geq 0$.

(1) Encontre as condições de primeira ordem da família representativa. Combine-as eliminando as variáveis co-estado e obtenha a expressão matemática da equação de Euler (valor = 0,5 ponto).

Solução: lembre-se, inicialmente, que, conforme informado no comando da questão, a oferta de trabalho é exógena e normalizada para ser igual a um ($\bar{n} = 1$). Então: $\bar{n}^{1-\theta} = (1)^{1-\theta} = 1$. Assim, a função Lagrangeana do problema é dada por:

$$\mathcal{L}(\{c_t, k_{t+1}, \lambda_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \beta^t \ln c_t - \lambda_t \left[c_t + k_{t+1} - z_t k_t^\theta + \frac{\phi}{2} (k_{t+1} - k_t)^2 \right] \right\}$$

Condições de Primeira Ordem (CPO):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^t \left(\frac{1}{c_t} \right) - \lambda_t = 0 \Rightarrow \lambda_t = \beta^t c_t^{-1} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = -\lambda_t + \lambda_{t+1} \theta z_{t+1} k_{t+1}^{\theta-1} - \lambda_t \phi(k_{t+1} - k_t) + \lambda_{t+1} \phi(k_{t+2} - k_{t+1}) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_t + \lambda_t \phi(k_{t+1} - k_t) = \lambda_{t+1} \theta z_{t+1} k_{t+1}^{\theta-1} + \lambda_{t+1} \phi(k_{t+2} - k_{t+1})$$

$$\Rightarrow \lambda_t [1 + \phi(k_{t+1} - k_t)] = \lambda_{t+1} [\theta z_{t+1} k_{t+1}^{\theta-1} + \phi(k_{t+2} - k_{t+1})]$$

Expressando o segundo termo da equação acima em termos de esperança matemática, teremos:

$$\Rightarrow \lambda_t [1 + \phi(k_{t+1} - k_t)] = E_t \lambda_{t+1} \{ \theta z_{t+1} k_{t+1}^{\theta-1} + \phi(k_{t+2} - k_{t+1}) \} \quad (2)$$

Combinando (1) e (2) obtém-se a equação de Euler para o consumo:

$$c_t^{-1} [1 + \phi(k_{t+1} - k_t)] = \beta E_t c_{t+1}^{-1} \{ \theta z_{t+1} k_{t+1}^{\theta-1} + \phi(k_{t+2} - k_{t+1}) \}$$

$$\left(\frac{1}{c_t} \right) [1 + \phi(k_{t+1} - k_t)] = \left(\frac{1}{c_{t+1}} \right) \beta E_t \{ \theta z_{t+1} k_{t+1}^{\theta-1} + \phi(k_{t+2} - k_{t+1}) \}$$

$$1 + \phi(k_{t+1} - k_t) = E_t \left\{ \beta \left(\frac{c_t}{c_{t+1}} \right) \theta z_{t+1} k_{t+1}^{\theta-1} + \phi(k_{t+2} - k_{t+1}) \right\}$$

(2) Escreva o sistema de equações que caracteriza o equilíbrio do modelo – a equação de Euler, a equação da restrição orçamentária e a lei de movimento da tecnologia – e encontre esse sistema no estado estacionário, ou seja, encontre as expressões matemáticas para $\bar{c}$ e $\bar{k}$, dado $\bar{z}$ e outros parâmetros do modelo (valor = 0,5 ponto).

Solução: o equilíbrio do modelo é caracterizado por um sistema de três equações: a equação de Euler, a equação da restrição orçamentária e a lei de movimento da tecnologia:

$$\begin{cases} c_t^{-1}[1 + \phi(k_{t+1} - k_t)] = \beta E_t c_{t+1}^{-1} \{z_{t+1} k_{t+1}^{\theta-1} + \phi(k_{t+2} - k_{t+1})\} \\ c_t + k_{t+1} = z_t k_t^\theta \bar{n}^{1-\theta} - \frac{\phi}{2} (k_{t+1} - k_t)^2 \\ \ln(z_t) = (1 - \rho) \ln(\bar{z}) + \rho \ln(z_{t-1}) + \varepsilon_t \end{cases}$$

No estado estacionário:

$$\bar{c} = c_t$$

$$\bar{k} = k_t = k_{t+1} = k_{t+2}$$

$$\bar{z} = z_t$$

$$\varepsilon_t = 0$$

Expressão matemática do capital no estado estacionário ($\bar{k}$):

$$c_t^{-1}[1 + \phi(k_{t+1} - k_t)] = \beta E_t c_{t+1}^{-1} \{ \theta z_{t+1} k_{t+1}^{\theta-1} + \phi(k_{t+2} - k_{t+1}) \}$$

$$\left(\frac{1}{c_t}\right) [1 + \phi(k_{t+1} - k_t)] = \left(\frac{1}{c_{t+1}}\right) \beta E_t \{ \theta z_{t+1} k_{t+1}^{\theta-1} + \phi(k_{t+2} - k_{t+1}) \}$$

$$\left(\frac{1}{\bar{c}}\right) \left[1 + \phi(\underbrace{\bar{k} - \bar{k}}_{=0}) \right] = \left(\frac{1}{\bar{c}}\right) \beta \left[\theta \bar{z} \bar{k}^{\theta-1} + \phi(\underbrace{\bar{k} - \bar{k}}_{=0}) \right]$$

$$1 = \beta [\theta \bar{z} \bar{k}^{\theta-1}]$$

$$\bar{k}^{\theta-1} = \frac{1}{\beta \theta \bar{z}}$$

$$\bar{k} = \left(\frac{1}{\beta \theta \bar{z}} \right)^{\frac{1}{\theta-1}}$$

$$\bar{k} = (\beta \theta \bar{z})^{\frac{1}{1-\theta}}$$

Expressão matemática do consumo no estado estacionário ($\bar{c}$):

$$c_t + k_{t+1} = z_t k_t^\theta \bar{n}^{1-\theta} - \frac{\phi}{2} (k_{t+1} - k_t)^2$$

$$\bar{c} + \bar{k} = \bar{z} \bar{k}^\theta - \frac{\phi}{2} \underbrace{(\bar{k} - \bar{k})^2}_{=0}$$

$$\bar{c} = \bar{z}\bar{k}^\theta - \bar{k}$$

$$\bar{c} = \bar{z} \left[(\beta\theta\bar{z})^{\frac{1}{1-\theta}} \right]^\theta - (\beta\theta\bar{z})^{\frac{1}{1-\theta}}$$

Questões extras:

(3) Explique brevemente a intuição econômica da seguinte expressão (valor = 0,5 ponto):

$$\frac{\phi}{2}(k_{t+1} - k_t)^2$$

Solução: o termo $\phi/2 (k_{t+1} - k_t)^2$ representa o custo de ajustamento para o estoque de capital. Se a família representativa (isto é, os residentes) decidir substituir apenas o capital depreciado, então $k_{t+1} = k_t$, de modo que esse termo será zero. Se, por outro lado, a família representativa decidir alterar o estoque de capital, terá de pagar custos de ajustamento. A função é convexa em k_{t+1} , o que implica um aumento do custo marginal para as mudanças no estoque de capital. Isso significa que a família representativa está tentando suavizar os custos de ajustamento ao longo dos períodos futuros: o estoque de capital se ajustará de forma mais suave ao seu novo valor após um choque do que no modelo *baseline* sem custos de ajustamento.

(4) O que acontece com o produto, o investimento (poupança) e o consumo se z_t é crescente (valor = 0,5 ponto)?

Solução: não é necessário derivar soluções analíticas para responder a esta questão. Primeiro, identifique a produção, o consumo e o investimento na restrição orçamentária. Em seguida, determine como a produção se altera, *ceteris paribus*, após um choque. A partir daí, pode-se dizer algo sobre como o consumo e o investimento se alteram.

Primeiro, a produção é dada pelo primeiro termo do lado direito da restrição orçamentária: $z_t k_t^\theta \bar{n}^{1-\theta}$. Se um choque positivo atingir a economia, z_t sobe, então a produção aumenta, *ceteris paribus*. Consumo e investimento também irão aumentar se z_t subir devido ao fato de a produção ser maior na economia. Maior produção significa que o consumidor deseja aumentar seu consumo não apenas hoje (portanto, o consumo aumenta), mas também em períodos futuros (a poupança aumenta e, conseqüentemente, o investimento também aumenta).