



MACROECONOMIA AVANÇADA

3ª Lista de Exercícios



13 DE OUTUBRO DE 2025

SÉRGIO RICARDO DE BRITO GADELHA

Programa de Doutorado e Mestrado Profissional em Economia, Políticas Públicas e
Desenvolvimento – Instituto Brasileiro de Ensino, Desenvolvimento e Pesquisa (IDP)

01 – No estudo do modelo Ramsey-Cass-Koopmans para uma economia descentralizada, a restrição orçamentária das famílias é expressa por:

$$\Delta a_{t+1} + c_t = x_t + r_t a_t \quad (1)$$

Todavia, essa restrição orçamentária das famílias pode ser expressão em diferentes formas também, onde o aumento dos ativos do início do período atual para o próximo período é igual à renda total menos o consumo. Derive a equação de Euler para o consumo e compare-a com a solução baseada na equação (1) para cada uma das seguintes maneiras de escrever a restrição orçamentária:

(a) $a_{t+1} = (1+r)(a_t + x_t - c_t)$, isto é, os ativos correntes e os ativos de renda, os quais não são consumidos, são investidos. Valor (0,5 ponto)

(b) $\Delta a_t + c_t = x_t + r a_{t-1}$, em que a_t representa o estoque de ativos no final do período, ao passo que c_t e x_t são o consumo e a renda durante o período t . Valor (0,5 ponto)

(c) A riqueza da família é representada por:

$$W_t = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_{t+s}}{(1+r)^s} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x_{t+s}}{(1+r)^s} + (1+r)a_t \quad (2)$$

Valor (0,5 ponto)

Dica: escreva a função Lagrangeana para cada uma das três situações apresentadas, e derive as condições de primeira ordem.

Solução:

(a) A função Lagrangeana pode ser definida da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_t = \sum_{s=0}^{\infty} \{ \beta^s U(c_{t+s}) + \lambda_{t+s} [(1+r)(a_{t+s} + x_{t+s} - c_{t+s}) - a_{t+s+1}] \}$$

Condições de Primeira Ordem (CPO):

$$\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial c_{t+s}} = \beta^s U'(c_{t+s}) - \lambda_{t+s}(1+r) = 0 \quad s \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial a_{t+s}} = \lambda_{t+s}(1+r) - \lambda_{t+s-1} = 0 \quad s > 0$$

Eliminando λ_{t+s} e determinando que $s = 1$ fornecerá a seguinte equação de Euler:

$$\frac{\beta U'(c_{t+1})}{U'(c_t)}(1+r) = 1$$

(b) A função Lagrangeana pode ser definida da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_t = \sum_{s=0}^{\infty} \{ \beta^s U(c_{t+s}) + \lambda_{t+s} [x_{t+s} + (1+r)a_{t+s-1} - c_{t+s} - a_{t+s}] \}$$

Condições de Primeira Ordem (CPO):

$$\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial c_{t+s}} = \beta^s U'(c_{t+s}) - \lambda_{t+s} = 0 \quad s \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial a_{t+s}} = \lambda_{t+s+1}(1+r) - \lambda_{t+s} = 0 \quad s > 0$$

Eliminando λ_{t+s} e determinando que $s = 1$ fornecerá a seguinte equação de Euler:

$$\frac{\beta U'(c_{t+1})}{U'(c_t)}(1+r) = 1$$

(c) Neste caso, a função Lagrangeana tem somente uma restrição simples, e não uma restrição para cada período. Pode ser escrito como:

$$\mathcal{L}_t = \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \beta^s U(c_{t+s}) + \lambda_t \left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{x_{t+s} - c_{t+s}}{(1+r)^s} + (1+r)a_t \right] \right\}$$

Como a_t é dado, somente exige-se a condição de primeira ordem para c_{t+s} , expressa por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial c_{t+s}} = \beta^s U'(c_{t+s}) - \lambda_t \frac{1}{(1+r)^s} = 0 \quad s \geq 0$$

Combinando as condições de primeira ordem para $s = 0$ e $s = 1$ permite eliminar λ_t para obter:

$$\lambda_t = \beta U'(c_{t+1})(1+r) = U'(c_t)$$

Ou, então:

$$\frac{\beta U'(c_{t+1})}{U'(c_t)}(1+r) = 1$$

Que é a mesma Equação de Euler expressa anteriormente. Mostra-se, portanto, que expressar o problema da família representativa em qualquer uma das três situações analisadas anteriormente produz a mesma Equação de Euler.

02 – Considere o Modelo de Gerações Sobrepostas, em tempo discreto, onde os indivíduos têm função utilidade logarítmica e depreciação é completa ($\delta = 1$). A mão-de-obra cresce à taxa n , isto é, $L(t) = (1 + n)L(0)$. Suponha que o agente supre inelasticamente seu trabalho no período 1 e maximiza:

$$U_t = \ln(c_1(t)) + \beta \ln(c_2(t + 1))$$

Sujeito a:

$$c_1(t) + s(t) = w(t)$$

$$c_2(t + 1) = R(t + 1)s(t)$$

Suponha que nessa economia a firma representativa possui a seguinte função de produção:

$$Y(t) = K(t)^\alpha (A(t)L(t))^{1-\alpha}$$

Onde $A(t)$ cresce à taxa $g > 0$, ou seja, $A(t) = (1 + g)A(0)$. Considere que $A(0), L(0) > 0$.

(1) Resolva o problema do consumidor e encontre $s(t)$. Dado que a firma maximiza seu lucro e se tem equilíbrio dos mercados (isto é, equilíbrio competitivo), encontre a expressão de $k(t + 1)$ em função dos parâmetros $A(t)$ e $k(t)$. Valor (0,5 ponto).

(2) Qual é a taxa de crescimento de k no estado estacionário? Valor (0,5 ponto).

Questões extras:

(3) Considere $\hat{k} \equiv K/LA$. Encontre $\hat{k}$ no estado estacionário em função dos parâmetros. Valor (1,0 ponto).

Solução:

(1) Resolve o seguinte problema de maximização:

$$\max \ln(c_1(t)) + \beta \ln(c_2(t + 1))$$

Sujeito a:

$$c_1(t) + s(t) = w(t) \Rightarrow c_1(t) = w(t) - s(t)$$

$$c_2(t+1) = R(t+1)s(t)$$

Substituindo $c_1(t)$ e $c_2(t+1)$ na função objetivo, tem-se:

$$\max \ln(w(t) - s(t)) + \beta \ln(R(t+1)s(t))$$

Condições de Primeira Ordem (CPO):

$$\frac{\partial U_t}{\partial s(t)} = 0 \Rightarrow \frac{-1}{w(t) - s(t)} + \frac{\beta R(t+1)}{R(t+1)s(t)} = 0$$

Cancela os termos destacados:

$$\frac{1}{w(t) - s(t)} = \frac{\beta R(t+1)}{R(t+1)s(t)}$$

$$s(t) = \beta(w(t) - s(t))$$

$$s(t) = \beta w(t) - \beta s(t)$$

$$s(t) + \beta s(t) = \beta w(t)$$

$$(1 + \beta)s(t) = \beta w(t)$$

$$s(t) = \frac{\beta}{(1 + \beta)} w(t) \quad (1)$$

Dado que a firma maximiza seu lucro:

$$w(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)} = (1 - \alpha)A(t)^{1-\alpha}K(t)^\alpha \quad (2)$$

Além disso, pela condição de equilíbrio de mercados (*market Clearing*):

$$K(t + 1) = L(t)s(t)$$

Dividindo pelo número de trabalhadores em $t + 1$, e considerando que população cresce à taxa n :

$$\frac{K(t + 1)}{L(t + 1)} = \frac{L(t)}{L(t + 1)} s(t)$$

$$\frac{K(t + 1)}{L(t + 1)} \underbrace{\frac{L(t)}{L(t + 1)}}_{(1+n)} = s(t)$$

$$k(t + 1)(1 + n) = s(t)$$

$$k(t + 1) = \frac{s(t)}{(1 + n)} = \frac{1}{(1 + n)} s(t) \quad (3)$$

Substituindo (1) e (2) em (3), tem-se:

$$k(t + 1) = \frac{1}{(1 + n)} \underbrace{\left\{ \frac{\beta}{(1 + \beta)} w(t) \right\}}_{s(t)}$$

$$k(t + 1) = \frac{1}{(1 + n)} \underbrace{\left\{ \frac{\beta}{(1 + \beta)} \frac{[(1 - \alpha)A(t)^{1-\alpha}K(t)^\alpha]}{w(t)} \right\}}_{s(t)}$$

$$k(t + 1) = \frac{\beta}{(1 + \beta)} \frac{(1 - \alpha)}{(1 + n)} A(t)^{1-\alpha} K(t)^\alpha \quad (4)$$

(2) No estado estacionário:

$$\frac{k(t+1)}{k(t)} = \frac{k(t)}{k(t-1)} = \dots$$

O estoque de capital *per capita* cresce a uma taxa constante. Dividindo (4) por $k(t)$, tem-se que:

$$\frac{k(t+1)}{k(t)} = \frac{\frac{\beta}{(1+\beta)} \frac{(1-\alpha)}{(1+n)} A(t)^{1-\alpha} K(t)^\alpha}{\frac{\beta}{(1+\beta)} \frac{(1-\alpha)}{(1+n)} A(t-1)^{1-\alpha} K(t-1)^\alpha}$$

$$\frac{k(t+1)}{k(t)} = \frac{A(t)^{1-\alpha} K(t)^\alpha}{A(t-1)^{1-\alpha} K(t-1)^\alpha}$$

$$\frac{k(t+1)}{k(t)} = \frac{A(t)^{1-\alpha}}{A(t-1)^{1-\alpha}} \left[\frac{k(t)}{k(t-1)} \right]^\alpha$$

No comando da questão, se $A(t) = (1+g)A(0)$, então: $A(t)^{1-\alpha} = (1+g)^{1-\alpha} A(t-1)^{1-\alpha}$

Logo:

$$\frac{k(t+1)}{k(t)} = \frac{(1+g)^{1-\alpha} A(t-1)^{1-\alpha}}{A(t-1)^{1-\alpha}} \left[\frac{k(t)}{k(t-1)} \right]^\alpha$$

$$\frac{k(t+1)}{k(t)} = (1+g)^{1-\alpha} \left[\frac{k(t)}{k(t-1)} \right]^\alpha$$

Mas, em estado estacionário:

$$\left[\frac{k(t)}{k(t-1)} \right]^\alpha = \left[\frac{k(t+1)}{k(t)} \right]^\alpha$$

Logo, tem-se que:

$$\frac{k(t+1)}{k(t)} = (1+g)^{1-\alpha} \left[\frac{k(t+1)}{k(t)} \right]^\alpha$$

$$\frac{\frac{k(t+1)}{k(t)}}{\left[\frac{k(t+1)}{k(t)} \right]^\alpha} = (1+g)^{1-\alpha}$$

$$\left[\frac{k(t+1)}{k(t)} \right]^{1-\alpha} = (1+g)^{1-\alpha}$$

$$\left[\frac{k(t+1)}{k(t)} \right] = (1+g)$$

$$g = \underbrace{\left[\frac{k(t+1)}{k(t)} \right] - 1}_{g_k} = \frac{k(t+1) - k(t)}{k(t)}$$

Assim, a taxa de crescimento de k : $g_k = g$

(3) No estado estacionário, $\hat{k}(t+1) = \hat{k}(t) = \hat{k}$

Então:

$$\hat{k} = \frac{\beta}{(1+\beta)} \frac{(1-\alpha)}{(1+n)} A(t)^{1-\alpha} K(t)^\alpha$$

$$\hat{k} = \frac{\beta}{(1+\beta)} \frac{(1-\alpha)}{(1+n)} \frac{A(t)}{A(t)^\alpha} K(t)^\alpha$$

$$\hat{k} = \frac{\beta}{(1 + \beta)} \frac{(1 - \alpha)}{(1 + n)} \underbrace{\frac{K(t)^\alpha}{A(t)^\alpha}}_{k^\alpha} A(t)$$

$$\hat{k} = \frac{\beta}{(1 + \beta)} \frac{(1 - \alpha)}{(1 + n)} \hat{k}^\alpha A(t)$$

No comando da questão, é possível definir que:

$$A(t + 1) = (1 + g)A(t) \Rightarrow A(t) = \frac{A(t + 1)}{(1 + g)}$$

Logo:

$$\hat{k} = \frac{\beta}{(1 + \beta)} \frac{(1 - \alpha)}{(1 + n)} k^\alpha \frac{A(t + 1)}{(1 + g)}$$