



MACROECONOMIA AVANÇADA

2ª Lista de Exercícios



30 DE SETEMBRO DE 2025

SÉRGIO RICARDO DE BRITO GADELHA

Programa de Doutorado e Mestrado Profissional em Economia, Políticas Públicas e
Desenvolvimento – Instituto Brasileiro de Ensino, Desenvolvimento e Pesquisa (IDP)

01 – Considere o seguinte modelo de planejamento central com trabalho:

$$y_t = c_t + i_t$$

$$\Delta k_{t+1} = i_t - \delta k_t$$

$$y_t = A \left[\alpha k_t^{1-\frac{1}{\gamma}} + (1-\alpha)n_t^{1-\frac{1}{\gamma}} \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\gamma}}}$$

Onde o objetivo é maximizar:

$$V_t = \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s [c_{t+s} + \varphi l_{t+s}]$$
$$\beta = \frac{1}{1+\theta}$$

Onde y_t é o produto; c_t é o consumo; i_t é o investimento; k_t é o estoque de capital; n_t é o emprego (trabalho); e l_t é o lazer ($l_t + n_t = 1$).

(a) Derive as expressões das quais as soluções de longo prazo para consumo, trabalho, e capital podem ser obtidas.

Solução: a função Lagrangeana será expressa por:

$$\mathcal{L}_t = \sum_{s=0}^{\infty} \{ \beta^s U(c_{t+s}, l_{t+s}) + \lambda_{t+s} [F(k_{t+s}, n_{t+s}) - c_{t+s} - k_{t+s+1} + (1-\delta)k_{t+s}] + \mu_{t+s} [1 - n_{t+s} - l_{t+s}] \}$$

A função Lagrangeana será maximizada com relação a:

$$\{c_{t+s}, l_{t+s}, n_{t+s}, k_{t+s+1}, \lambda_{t+s}, \mu_{t+s}; s \geq 0\}$$

Condições de Primeira Ordem (CPO):

$$\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial c_{t+s}} = \beta^s U_{c,t+s} - \lambda_{t+s} = 0 \quad s \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial l_{t+s}} = \beta^s U_{l,t+s} - \mu_{t+s} = 0 \quad s \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial n_{t+s}} = \lambda_{t+s} F_{n,t+s} - \mu_{t+s} = 0 \quad s \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial k_{t+s}} = \lambda_{t+s} [F_{k,t+s} + 1 - \delta] - \lambda_{t+s-1} = 0 \quad s > 0$$

A equação de Euler do consumo para $s = 1$ é dado por:

$$\beta \left(\frac{U_{c,t+1}}{U_{c,t}} \right) [F_{k,t+1} + 1 - \delta] = 1$$

Ou, nesse caso:

$$\beta \left(\frac{c_t}{c_{t+1}} \right) \left[\alpha A^{1-\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{y_{t+1}}{k} t + 1 \right)^{\frac{1}{\gamma}} + 1 - \delta \right] = 1$$

A solução de equilíbrio estático de longo prazo é, portanto:

$$\frac{y}{k} = A^{1-\gamma} \left(\frac{\theta + \delta}{\alpha} \right)^{\gamma}$$

Eliminando λ_{t+s} e μ_{t+s} das condições de primeira ordem para consumo, lazer e emprego fornece, para $s = 0$:

$$\frac{\varphi}{l_t} = \frac{(1-\alpha) A^{1-\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{y_t}{n_t} \right)^{\frac{1}{\gamma}}}{c_t} \quad (1)$$

Consequentemente, a solução de longo prazo satisfaz:

$$\frac{c}{1-n} = \frac{1-\alpha}{\varphi} \left[A^{1-\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{y}{n} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right] \quad (2)$$

As soluções para os valores de longo prazo (c, k, l, n, y) são obtidas resolvendo as equações (1) e (2) simultaneamente com:

$$y = A \left[\alpha k^{1-\frac{1}{\gamma}} + (1-\alpha)n^{1-\frac{1}{\gamma}} \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\gamma}}}$$

$$y = c + \delta k$$

$$l + n = 1$$

Essas equações formam um sistema não linear e não possuem uma solução analítica.

(b) Quais são as taxas de juros reais e os salários implícitos a longo prazo?

Solução: o salário real implícito de longo prazo será expresso por:

$$w_t = F_{n,t} \Rightarrow w_t = (1-\alpha)A^{1-\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{y_t}{n_t} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Além disso, a taxa de juros real de longo prazo é expressa por: $r = \theta$.

(c) Comente as implicações para o trabalho de ter uma elasticidade de substituição entre capital e trabalho diferente da unidade.

Solução: a demanda de mão de obra a longo prazo é expressa por:

$$n = (1-\alpha)^{\gamma} A^{-(1-\gamma)} y w^{-\gamma}$$

Portanto, quanto maior o grau de substitutibilidade entre capital e trabalho (γ), mais sensível será a demanda por trabalho a mudanças no salário real. A parcela (participação) da mão-de-obra (trabalho) será expressa por:

$$\frac{wn}{y} = (1-\alpha)^{\gamma} \left(\frac{w}{A} \right)^{1-\gamma}$$

Consequentemente, quanto menor for a elasticidade de substituição, maior será a parcela (participação) do trabalho. Se $\gamma = 1$, então a parcela (participação) do trabalho é constante. Note-se também que um aumento na produtividade (A) aumenta a participação do trabalho se $\gamma > 1$.

(d) Obtenha a relação capital-trabalho de longo prazo.

Solução: a partir dos produtos marginais do capital e do trabalho, pode-se demonstrar que a relação capital-trabalho de longo prazo é expressa por:

$$\frac{k}{n} = \left[\frac{\alpha w}{(1 - \alpha)(\theta + \delta)} \right]^\gamma$$

Assim, quanto maior o grau de substitutibilidade (γ), maior será a resposta da relação capital-trabalho às mudanças nas taxas de retorno do capital e do trabalho.

(valor = 1,0 ponto).

02 – Considere o Modelo de Solow-Swan com a seguinte função de produção Cobb-Douglas:

$$Y_t = F(K_t, N_t) = AK_t^\alpha N_t^{1-\alpha}$$

Em que $N_{t+1} = (1+n)N_t$ e $\alpha \in (0,1)$.

(a) Mostre que a função de produção exibe tecnologia com retornos constantes de escala.

Solução: deve-se mostrar que $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é homogênea de grau 1 (um). Em outras palavras, deve-se mostrar que, para $\lambda > 0$, $F(\lambda K_t, \lambda N_t) = \lambda F(K_t, N_t)$. Então:

$$F(\lambda K_t, \lambda N_t) = A(\lambda K_t)^\alpha (\lambda N_t)^{1-\alpha} = \lambda A K_t^\alpha N_t^{1-\alpha} = \lambda F(K_t, N_t)$$

(b) Expresse o produto da economia como uma função da relação capital-trabalho: $k_t = K_t/N_t$

Solução: use o fato de que F é homogêneo de grau 1.

$$\begin{aligned} Y_t = F(K_t, N_t) &= AK_t^\alpha N_t^{1-\alpha} \Rightarrow \frac{F(K_t, N_t)}{N_t} = \frac{AK_t^\alpha N_t^{1-\alpha}}{N_t} \Rightarrow \frac{F(K_t, N_t)}{N_t} = \frac{AK_t^\alpha N_t N_t^{-\alpha}}{N_t} \\ &\Rightarrow \frac{F(K_t, N_t)}{N_t} = \frac{AK_t^\alpha \cancel{N_t}}{\cancel{N_t} N_t^\alpha} \Rightarrow \frac{F(K_t, N_t)}{N_t} = A \left(\frac{K_t}{N_t} \right)^\alpha \Rightarrow \frac{F(K_t, N_t)}{N_t} = A \left(\frac{K_t}{N_t} \right)^\alpha \\ &\Rightarrow F(K_t, N_t) = N_t A \left(\frac{K_t}{N_t} \right)^\alpha \Rightarrow F(K_t, N_t) = N_t A k_t^\alpha \end{aligned}$$

Alternativamente:

$$Y_t = F(K_t, N_t) = AK_t^\alpha N_t^{1-\alpha}$$

$$Y_t = N_t F\left(\frac{K_t}{N_t}, \frac{N_t}{N_t}\right) = N_t A \left(\frac{K_t}{N_t}\right)^\alpha \left(\frac{N_t}{N_t}\right)^{1-\alpha}$$

$$Y_t = N_t F(k_t, 1) = N_t A(k_t)^\alpha (1)^{1-\alpha}$$

$$Y_t = N_t F(k_t, 1) = N_t A(k_t)^\alpha$$

$$Y_t = N_t f(k_t)$$

(c) Encontre a taxa salarial por trabalhador e a taxa de aluguel por capital.

Solução: a maximização do lucro, tanto pelo planejador social ou pela firma representativa na economia, resulta nas seguintes produtividades marginais:

Produtividade Marginal do Trabalho:

$$w_t = \frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial N_t} = (1 - \alpha)AK_t^\alpha N_t^{1-\alpha-1} = (1 - \alpha)AK_t^\alpha N_t^{-\alpha} = (1 - \alpha)A \frac{K_t^\alpha}{N_t} \\ = (1 - \alpha)A \left(\frac{K_t}{N_t}\right)^\alpha = (1 - \alpha)Ak_t^\alpha$$

Produtividade Marginal do Capital:

$$R_t = \frac{\partial F(K_t, N_t)}{\partial K_t} = \alpha AK_t^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha} = \alpha Ak_t^{\alpha-1}$$

Note que isso pressupõe que o bem atue aqui como numerário (seu preço é definido como 1).

(d) Encontre o sistema dinâmico (que descreve a evolução de k_t ao longo do tempo) supondo que a taxa de poupança é $s \in (0,1)$ e a taxa de depreciação é $\delta \in (0,1]$.

Solução: deve-se caracterizar a trajetória de $\{k_t\}_{t=0}^\infty$ dado $s \in (0,1)$ e $\delta \in (0,1]$. Isto é, nós devemos encontrar a equação de diferenças não lineares $k_{t+1} = \phi(k_t)$.

Inicia-se a partir da lei de movimento do estoque agregado de capital:

$$K_{t+1} = sY_t + (1 - \delta)K_t$$

O passo seguinte é colocar a equação acima em termos por trabalhador ao dividir ambos os lados por N_{t+1} .

$$k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{N_{t+1}} = s \frac{Y_t}{N_t} \frac{N_t}{N_{t+1}} + (1 - \delta) \frac{K_t}{N_t} \frac{N_t}{N_{t+1}} = \frac{sAk_t^\alpha + (1 - \delta)k_t}{1 + n} \equiv \phi(k_t) \quad (1)$$

Em que $y_t = f(k_t) = Ak_t^\alpha$. Algumas vezes é útil reescrever essa condição em termos de Δk_{t+1} . Para tanto, deve-se subtrair k_t de ambos os lados da equação acima para se obter:

$$\Delta k_{t+1} = \frac{sAk_t^\alpha - (n + \delta)k_t}{1 + n}$$

(e) Qual é a taxa de crescimento de k_t , $\gamma_{k_t} \equiv (k_{t+1} - k_t)/k_t$?

Solução: a taxa de crescimento de k_t será dada por:

$$\gamma_{k_t} = \frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = \frac{sAk_t^{\alpha-1} - (\delta + n)}{1 + n}$$

(f) Encontre o nível de estado estacionário do estoque de capital por trabalhador (k), renda por trabalhador ($y = Y/N$) e consumo *per capita* (c)

Solução: no estado estacionário, $k_{t+1}^{ss} = k_t^{ss} = k$, que implica que $\gamma_k = 0$. Assim, a partir da expressão para γ_{k_t} , tem-se a seguinte expressão para o estoque de capital por trabalhador (k):

$$k = \left(\frac{sA}{\delta + n} \right)^{1/(1-\alpha)}$$

A renda por trabalhador será dada por:

$$y = f(k) = Ak^\alpha = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Finalmente, para se obter o consumo por trabalhador no estado estacionário, observe que, em modo geral, para uma economia fechada e sem governo, tem-se que $y_t = c_t + i_t$, em que $i_t = sy_t$ e $c_t = (1 - s)y_t$. Então, no estado estacionário:

$$c = (1 - s)y = (1 - s) \underbrace{A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}_y$$

(valor = 1,5 ponto).

Questões extras:

(g) Qual é o valor da regra de ouro de k ? (k tal que o consumo no estado estacionário é maximizado).

Solução: o valor da regra de ouro de k_t é o estoque de capital por trabalhador que maximiza o consumo no estado estacionário. Lembre-se que, em geral:

$$c_t = (1 - s)y_t = f(k_t) - sf(k_t)$$

Note que não há como maximizar o consumo em todos os estados, pois o consumo é uma função de $f(k_t)$, que é ilimitada¹ (nós somente podemos obter a solução de canto $k_t = 0$ se olharmos para um ponto estacionário). Todavia, a condição de estado estacionário é:

$$\underbrace{sf(k)}_{\substack{\text{investimento} \\ \text{per} \\ \text{capita}}} = \underbrace{(n + \delta)k}_{\substack{\text{parte de } k \\ \text{que é "perdida" por causa da} \\ \text{depreciação e do} \\ \text{crescimento populacional}}} \quad (2)$$

Que é verdade para qualquer estado estacionário (isto é, qualquer conjunto em que $k_{t+1}^{ss} = k_t^{ss} = k$). Então, dado que $c_t = f(k_t) - sf(k_t)$, no estado estacionário:

$$c = f(k) - (n + \delta)k$$

Que agora irá aceitar uma solução interior. As condições de primeira ordem para o problema de maximização serão dadas por:

$$\frac{\partial c}{\partial k} = f'(k) - (n + \delta) = 0 \Rightarrow f'(k^{RO}) = n + \delta$$

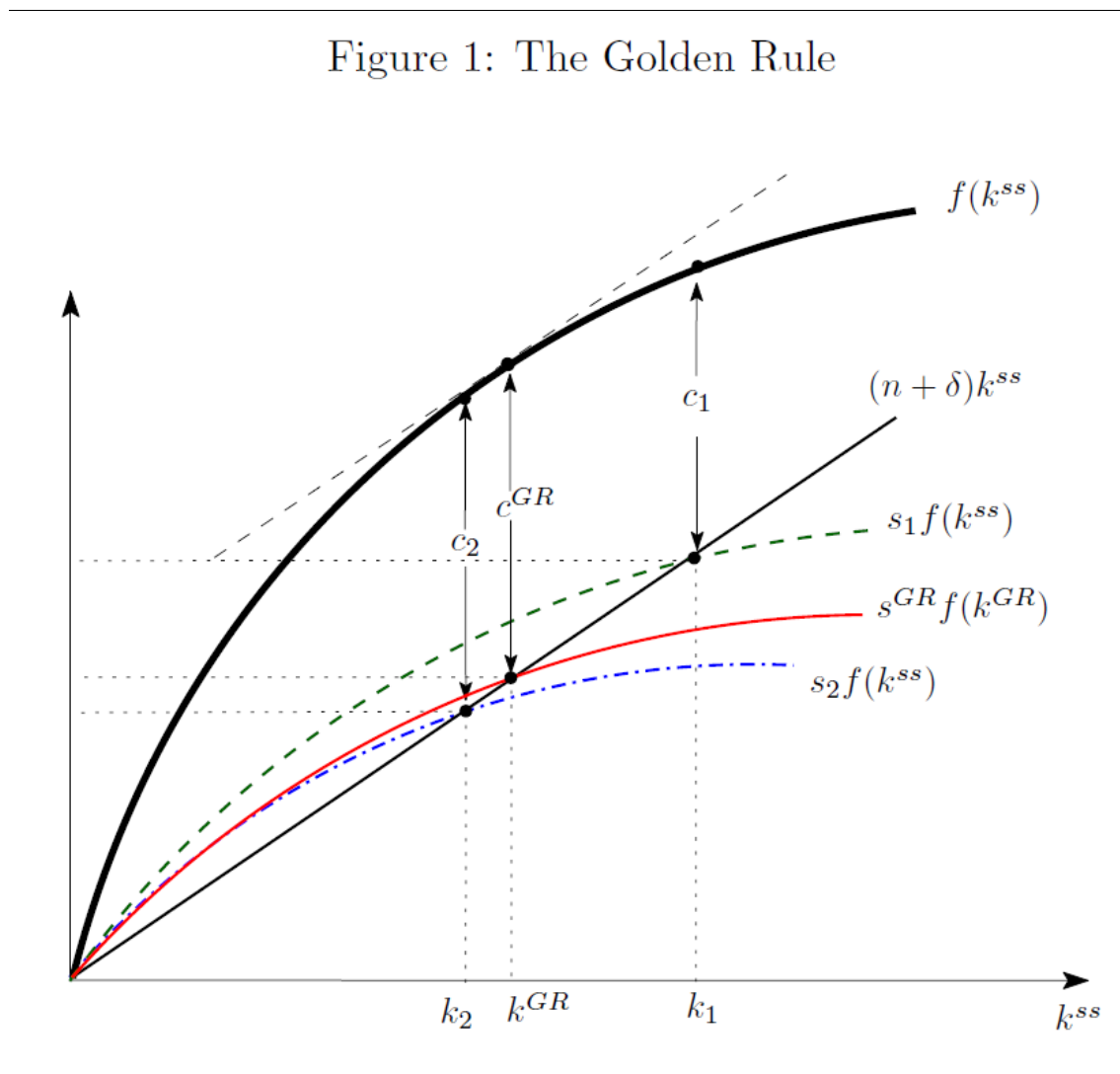
Para $y = Ak^\alpha$, pode-se obter uma solução de forma fechada para k^{RO} :

$$f'(k^{RO}) = \alpha A(k^{RO})^{\alpha-1} = n + \delta$$

¹ Em língua inglesa, trata-se de uma “function unbounded”. Uma função ilimitada é uma função que não é limitada superiormente nem inferiormente por uma constante; seus valores de produto aumentam ou diminuem indefinidamente.

$$k^{RO} = \left(\frac{\alpha A}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (3)$$

O conceito de Regra de Ouro para o caso do Modelo de Solow é ilustrado na Figura 1. Nela, pode-se analisar três taxas de poupança alternativas e, além disso, pode-se visualizar a condição da regra de Ouro: $f'(k^{RO}) = \alpha A(k^{RO})^{\alpha-1} = n + \delta$. A inclinação de $f(\cdot)$ precisa ser igual à inclinação da linha $(n + \delta)k$.



(h) Qual taxa de poupança é necessária para produzir a Regra de Ouro?

Solução: comparando a equação (3) com a expressão para o capital em estado estacionário, é fácil ver que a taxa de poupança que permite à economia alcançar k^{RO} é $s^{RO} = \alpha$.

Alternativamente, lembre-se que $f'(k^{RO}) = n + \delta$ e $k_t f'(k_t)/f(k_t) = \alpha$. Então:

$$\frac{k^{RO} f'(k^{RO})}{f(k^{RO})} = \frac{k^{RO} (n + \delta)}{f(k^{RO})} = \alpha$$

Mas então o nível de capital da Regra de Ouro também satisfaz a condição mais geral para todos os estados estacionários. Combinando essa condição (2) com a anterior, podemos ver que $s^{RO} = \alpha$.

(i) Encontre a elasticidade de y em relação a s (no estado estacionário). As diferenças observadas nas taxas de poupança podem explicar as diferenças observadas na renda *per capita* em diversos países ao redor do mundo?

Solução: lembre-se que:

$$y = f(k) = Ak^\alpha = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Tomando-se a expressão acima em termos de logaritmos, tem-se:

$$\ln(y) = \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) \ln(A) + \underbrace{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)}_{\varepsilon_{ys}} \ln(s) + \dots$$

Suponha que $\alpha = 1/3$, conforme tem sido encontrado em estudos empíricos e, além disso, existe uma diferença de 3 vezes nas taxas de poupança entre os países (300%). Então, a elasticidade será:

$$\varepsilon_{ys} = \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3-1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Isso implica que a diferença em y de acordo com o modelo (com tecnologia Cobb-Douglas) deve ser: $0,5 \times 300\% = 150\%$.

Todavia, a diferença observada em perto de 20 vezes, conforme informado em estudos e livros-textos de macroeconomia.

Observação:

$$\frac{\frac{\partial \log(y)}{\partial y} \partial y}{\frac{\partial \log(x)}{\partial x} \partial x} \approx \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\% \Delta y}{\% \Delta x}$$

(j) Encontre o sistema dinâmico que descreve a evolução de y_t sob a hipótese de que a taxa de depreciação é $\delta = 1$.

Solução: com $\delta = 1$, a lei de movimento do estoque de capital por trabalhador será expressa por:

$$k_{t+1} = \frac{sAk_t^\alpha}{1+n}$$

Note que o numerador representa o investimento *per capita*. Assim, essa expressão indica que o novo estoque de capital (que é completamente renovado a cada período) é menor que o investimento por trabalhador, devido ao crescimento populacional. Nós precisamos caracterizar $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ ao analisar a equação em diferenças não linear $y_{t+1} = \varphi(y_t)$. Lembre-se que $y_t = Ak_t^\alpha$. Então:

$$y_{t+1} = Ak_{t+1}^\alpha = A \left(\frac{sAk_t^\alpha}{1+n} \right)^\alpha = A \left(\frac{sy_t}{1+n} \right)^\alpha \equiv \varphi(y_t)$$

Lembre-se que o investimento ocorre em t enquanto o novo capital social estará prontamente disponível em $t + 1$.

(valor = 1,5 ponto).