Macroeconomia II

Aula 2(a): A Economia Centralizada

Modelo Básico de Equilíbrio Geral Dinâmico (Modelo DGE)

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans (Tempo Discreto)

Informativo

Essa nota de aula é um resumo dos principais tópicos constantes nas referências bibliográficas da disciplina Macroeconomia 2 ("Teoria Macroeconômica"), lecionada no Mestrado Profissional em Economia, Políticas Públicas e Desenvolvimento do Instituto Brasileiro de Ensino, Desenvolvimento e Pesquisa (IDP).

Eu destaco que essa nota de aula não tem fins comerciais, servindo exclusivamente como material de apoio às aulas dessa disciplina.

Quaisquer erros e omissões são de minha inteira responsabilidade.

Contribuições e considerações podem ser enviadas para: sergio.gadelha@idp.edu.br

Motivação

Esta aula apresenta o modelo básico de equilíbrio geral dinâmico de uma economia fechada e sem governo (isto é, economia autárquica).

Objetivo: o modelo explica como o nível ótimo do produto é determinado nessa economia autárquica, e como esse nível ótimo do produto é alocado entre consumo e investimento (isto é, acumulação de capital) ou, em outras palavras, entre consumo hoje e consumo futuro.

O modelo está no cerne ("coração", *"cornestone"*, ponto de partida) da macroeconomia moderna, sendo inclusive a base para a teoria neoclássica de crescimento econômico (Solow, 1956; Cass, 1965; Koopmans, 1967).

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Quanto de sua renda uma nação deve economizar (Ramsey, 1928)?

Frank Ramsey (1928), jovem matemático, desenvolveu um modelo dinâmico para responder a esse questionamento.

O modelo de Ramsey foi revisitado por David Cass (1965), Tjalling Koopmans (1965), bem como William Brock e Leonard Mirman (1972), sendo conhecido doravante por Modelo Ramsey-Cass-Koopmans.

Isola-se alguns aspectos centrais

Muitas informações relevantes estarão faltando nesse modelo:

Não existe: governo, estrutura de mercado (em particular, mercados financeiros), moeda (todas as variáveis estão expressas em termos reais, mas não em termos nominais).

Não existe incertezas nem fontes de persistência.

Não há crescimento populacional, nem progresso tecnológico.

A oferta de trabalho (mão-de-obra) será fixa, e o capital poderá ser instalado sem custos de ajustamento.

Motivação

Por que começar por um modelo macroeconômico aparentemente tão irrealista e simplista?

Motivação

Existe uma boa tradição científica de começar com estruturas simples e bem compreendidas.

A complexidade sempre pode ser adicionada, mas isso precisa ser feito de forma disciplinada.

Caso contrário, nós teríamos de confiar imediatamente em métodos numéricos que são rotineiramente utilizados em modelos macroeconômicos de grande escala.

Mas tais métodos só serão esclarecedores se o núcleo de um modelo for suficientemente simples para que possa ser compreendido.

As aulas subsequentes abordarão extensões e adicionarão recursos adicionais.

Motivação

O modelo básico da economia centralizada, apesar da sua simplicidade, tem sido muito influente ao longo de décadas.

Interpretações do modelo básico

Modelo-base para a teoria do crescimento econômico neoclássico

Modelo de Ramsey: Frank Ramsey (1928) introduziu uma versão similar para estudar questões tributárias. Por isso, o modelo é frequentemente chamado de modelo de Ramsey.

Modelo do Planejador Social (Central): as decisões são tomadas de maneira centralizada por um planejador central, tomando-se como dadas as preferências individuais (as quais são consideradas idênticas).

Preferências de "uma família representativa" ou "dinastia".

Economia de Robson Crusoé: refere-se apenas a um único indivíduo.

Modelo do Agente Representativo: todos os agentes econômicos são idênticos e atuam como se fossem um só indivíduo. Residentes e firmas possuem os mesmos objetivos.

Questionamentos

Como o PIB é determinado?

Como o PIB é dividido entre consumo e investimento?

Premissas

Agente representativo com vida infinita

Função utilidade separável ao longo do tempo

Retornos constantes de escala

Produtividade marginal decrescente

Economia fechada e sem governo

População constante (N)

Ingredientes do modelo básico

Y_t	• Produto agregado
C_t	• Consumo agregado (ou consumo do agente representativo)
K_t	• Nível de capital pré-determinado disponível para a produção
I_t	• Investimento bruto agregado realizado no período
S_t	• Poupança agregada

Considera-se variáveis em termos *per capita*

$y_t = Y_t/N$	• Produto *per capita*
$c_t = C_t/N$	• Consumo *per capita*
$k_t = K_t/N$	• Capital *per capita*
$i_t = I_t/N$	• Investimento bruto *per capita*
$s_t = S_t/N$	• Poupança *per capita*

Questionamentos

Para capturar as escolhas entre "consumo hoje" e "consumo amanhã" em uma economia fechada, considere 3 equações básicas (formato *per capita*):

Modelo consiste em 3 equações (*per capita*)

(1) Restrição de Recursos da Economia: Identidade da renda nacional

$$y_t = c_t + i_t \qquad (2.1)$$

Em que y_t é o PIB. No período t, o produto da economia consiste no consumo (c_t) mais o investimento (i_t). Isto é, o produto da economia é usado para consumo e investimento.

A identidade nacional (2.1) também representa a **restrição de recursos da economia**. O produto total também é a renda total $(produto \equiv renda)$, que pode ser gasta em consumo ou poupada:

$$y_t = c_t + s_t$$

A poupança pode somente ser usada para financiar investimento: $i_t = s_t$, ou seja, poupança é igual ao investimento.

Lembrem-se que poupança é a renda não consumida:

$$s_t = y_t - c_t = i_t$$

Modelo consiste em 3 equações

(2) Equação (lei) do movimento do capital (ou dinâmica do estoque de capital):

$$\Delta k_{t+1} = k_{t+1} - k_t = i_t - \delta k_t \qquad (2.2)$$

k_t é o estoque de capital no período *t.*

Δk_{t+1}, que é a variação do estoque de capital entre os período t + 1 e t, resulta do investimento bruto (i_t) menos a taxa de depreciação (δ). Assume-se que uma proporção constante $\delta \in (0,1)$ do estoque de capital existente se deprecia no período t.

Na produção, as firmas consomem apenas parte do estoque de capital (δk_t), onde δ é a taxa de depreciação do capital no começo do período t.

O investimento i_t é poupado como capital para o próximo período.

Modelo consiste em 3 equações

O capital pode ser acumulado ao longo do tempo através do investimento em bens de capital, mas o estoque de capital se deprecia:

$$k_{t+1} - k_t = i_t - \delta k_t \Rightarrow k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$$

Isso implica que:

(i) O estoque de capital aumenta ao longo do tempo quando $i_t > \delta k_t$ (as novas compras de bens de capital excedem a depreciação dos bens de capital existentes - ou seja, o investimento líquido é positivo).

(ii) O estoque de capital diminui ao longo do tempo quando $i_t < \delta k_t$ (investimento líquido negativo).

Modelo consiste em 3 equações

(3) Função de produção:

$$y_t = f(k_t) \qquad (2.3)$$

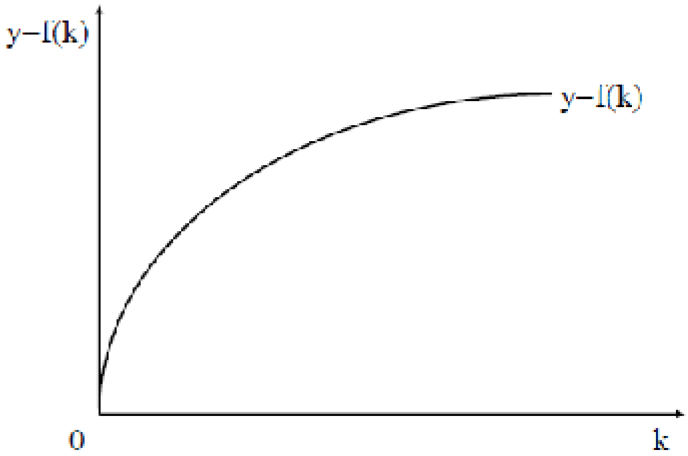
No período t, a dotação é o estoque de capital k_t. As firmas produzem o produto y_t usando o capital k_t como insumo.

Ideia: a função de produção "neoclássica" f é tal que um aumento de k aumenta a produção, mas a uma taxa decrescente. A produção nesta economia é realizada por um grande número de empresas competitivas, usando apenas capital.

Seja $k > 0$. Condições de Inada (1964): $f(k_t) > 0$, $f(0) = 0, f'(k) > 0$, $e\ f''(k) < 0$

$$\lim_{k \to \infty} f'(k) \to 0 \ e \ \lim_{k \to 0} f'(k) \to \infty$$

Modelo consiste em 3 equações



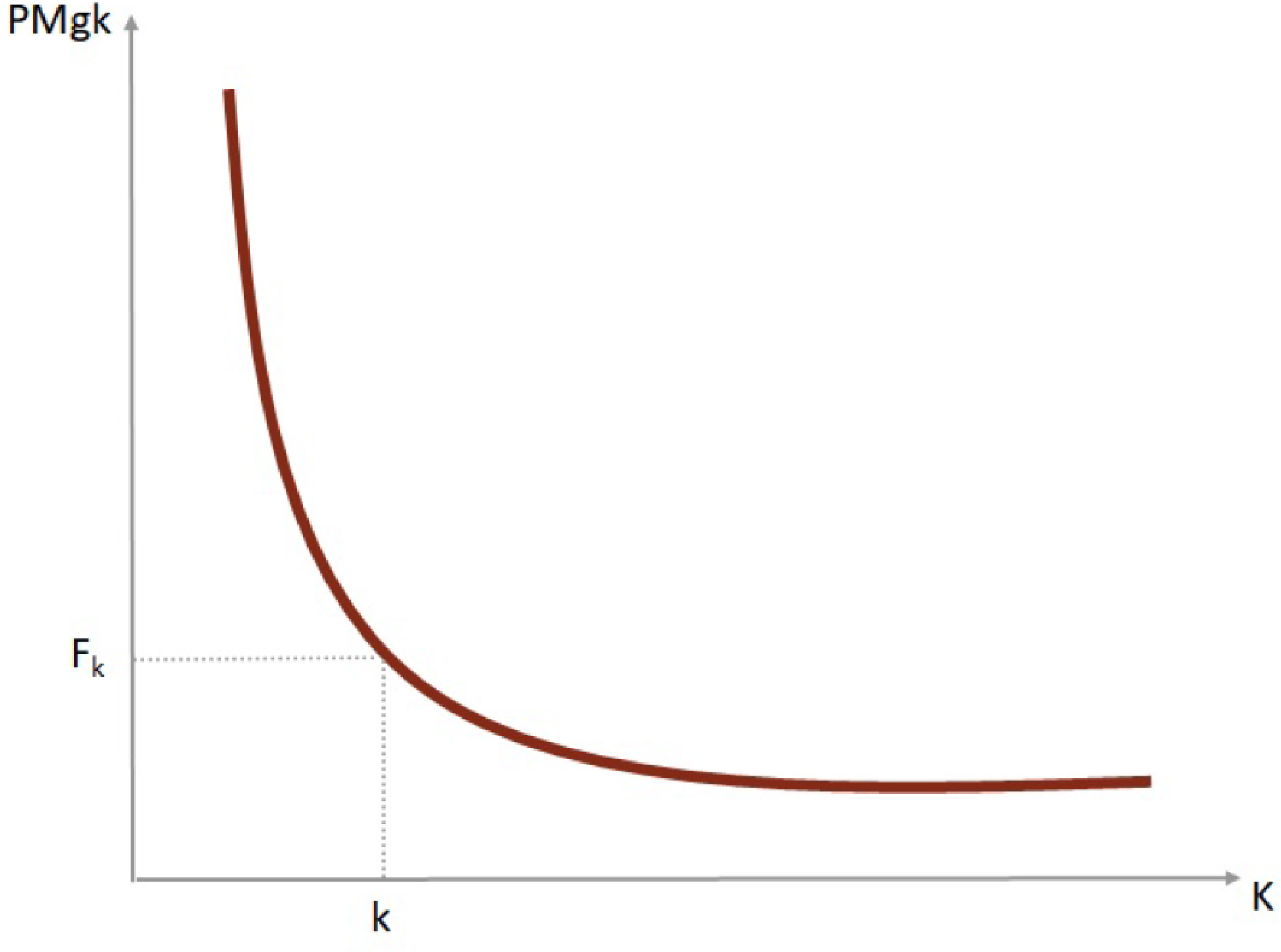
O que dizem as condições de Inada?

Na origem há ganhos de produto infinitos para aumentar *k*;

Esses ganhos diminuem à medida que *k* se torna maior;

Eles eventualmente desaparecem se *k* se torna arbitrariamente grande.

Produtividade Marginal do Capital



Função de Produção Agregada

A função de produção agregada é expressa por: $Y_t = F(K_t, N)$.

Na tradição neoclássica, *F* tem retornos constantes de escala, isto é, para qualquer variação λ de ambos os insumos, a função *F* satisfaz:

$$Y_t = F(\lambda K_t, \lambda N) = \lambda F(K_t, N) = \lambda Y_t$$

A população (N) é constante. Logo, assumindo $\lambda = 1/N$, o produto *per capita* satisfaz:

$$y_t = \frac{Y_t}{N} = \frac{F(K_t, N)}{N} = F\left(\frac{K_t}{N}, \frac{N}{N}\right) = F(k_t, 1) \equiv f(k_t)$$

Em alguns livros-textos de macroeconomia avançada (por exemplo, Wickens), podemos encontrar uma notação alternativa para o produto *per capita*: $F(k_t, 1) \equiv F(k_t)$.

Restrição Dinâmica de Recursos

Combinando as três equações, tem-se que:

$$f(k_t) = y_t \Rightarrow f(k_t) = c_t + i_t \Rightarrow f(k_t) = c_t + \left[\underbrace{k_{t+1} - (1-\delta)k_t}_{i_t}\right]$$

$$\Rightarrow f(k_t) = c_t + k_{t+1} - k_t + \delta k_t \Rightarrow f(k_t) = c_t + (\Delta k_{t+1} + \delta k_t) \qquad (2.4)$$

Como $\Delta k_{t+1} = k_{t+1} - k_t$, a equação (2.4) é a restrição dinâmica não-linear de recursos da economia. Dado o estoque inicial de capital (k_t = dotação inicial), a economia precisa escolher seu nível de consumo no período t (c_t) e o capital no início do período $t + 1$ (k_{t+1}).

O objetivo do planejador central é maximizar o consumo ou a utilidade derivada do consumo, mas não o produto.

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$$

Preferências

O que os consumidores gostariam de fazer? Uma primeira tentativa: maximizar o consumo no presente(c_t). Segundo a equação (2.4), percebe-se que o consumo pode ser definido como sendo o produto da economia menos os recursos gastos no aumento do capital

$$f(k_t) = c_t + (\Delta k_{t+1} + \delta k_t) \Rightarrow f(k_t) = c_t + k_{t+1} - k_t + \delta k_t$$
$$\Rightarrow f(k_t) = c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t$$

$$c_t = f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t = f(k_t) - k_{t+1} + k_t - \delta k_t$$

$$c_t = f(k_t) - (k_{t+1} - k_t) - \delta k_t \quad (2.4)$$

Maximizar o consumo significa zerar o estoque de capital amanhã: k_{t+1}. Faz sentido isso? Se você consome hoje, a economia irá acabar no período seguinte... Então, como a família representativa escolhe o quanto vale a pena ter amanhã versus o que se tem hoje em termos de consumo?

Interpretação da equação (2.4)

Considere um período inicial t = 0 com um dado valor pré-determinado k_0 (que fixa o produto $f(k_0)$ no período t = 0).

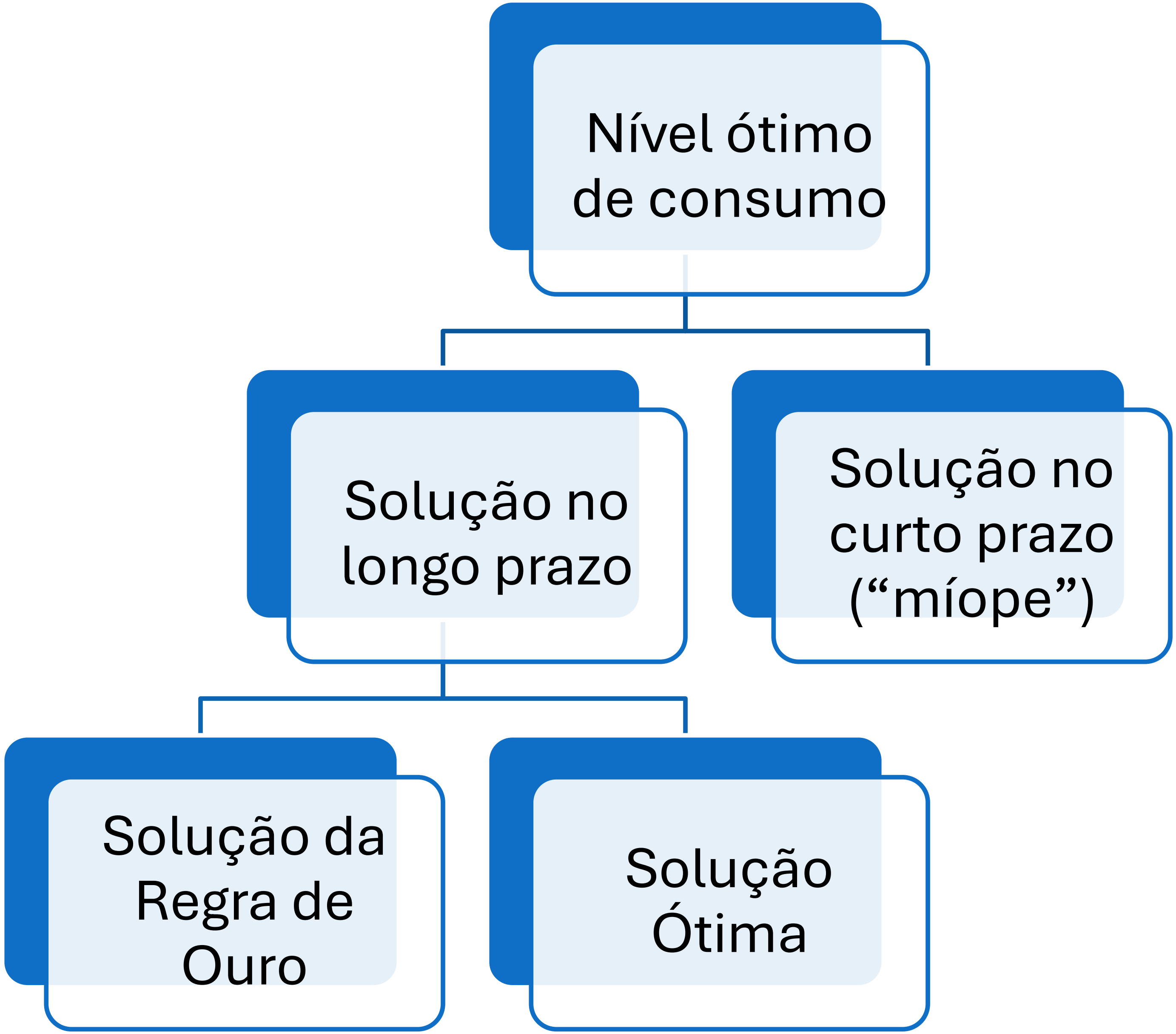
Suponha que exista alguma regra ou alguma regularidade que nos diga para o valor dado de k_0 como determinar o nível de consumo c_0. Isso implicitamente irá determinar k_1 .

Se nós usarmos a mesma regra novamente em t = 1, nós iremos encontrar c_1 e, implicitamente, k_2.

Continuando essa lógica recursiva para t = 2, 3, ..., nós podemos derivar a sequencia inteira de "*c*" e "*k*" para o futuro infinito, isto é: $T \rightarrow \infty$

A equação (2.4) é não linear porque causa do termo $f(k_t)$.

Qual é o nível ótimo de consumo?



Preferências

Dada a restrição dinâmica derivada da equação (2.4), nós precisamos de algum critério ou objetivo a fim de determinar as escolhas ótimas de consumo. Duas respostas "naive" seriam:

(i) Resposta míope: uma escolha extrema seria inteiramente míope, ou seja, dado $k_{t+1} = 0$, para um dado valor k_0, o nível mais alto possível de c_0 no período $t = 0$ equivale a:

$$c_0^{míope} = f(k_0) + (1 - \delta)k_0$$

Trata-se do nível máximo de consumo que poderia ser obtido no curto prazo.

Preferências

No entanto, essa escolha implicaria $k_1 = 0$, ou seja, não é sustentável (na verdade, implicaria produção zero e consumo zero em todos os períodos futuros!)

Assim, o consumo míope não pode ser ótimo em nenhum sentido. Uma vez que $k_{t+1} = 0$, todo o consumo futuro será igual a zero.

Ou seja, trata-se uma "festa" hoje seguida de "fome" amanhã!

Possíveis escolhas para o consumo

Um critério mais razoável é impor que os níveis de consumo devem ser sustentáveis no longo prazo, ou seja, o consumo deve ser maximizado em cada período.

Consideraremos duas alternativas: a chamada **solução da regra de ouro e uma solução ótima**.

A principal diferença entre os dois conceitos de solução é que, na solução ótima, o consumo futuro será descontado, enquanto a regra de ouro ignora o desconto.

1. Solução da Regra de Ouro

Regra de Ouro – Estado Estacionário

A solução da regra de ouro é derivada a partir de um objetivo de longo prazo:

(i) Essa solução maximiza a quantidade (constante) de consumo *per capita* em cada período.

(ii) ao fazer isso, trata os membros de diferentes gerações da mesma forma ("regra de ouro").

Regra de Ouro – Estado Estacionário

Maximizar o consumo no período t equivale a maximizar a função $U(c_t)$. Na equação (2.4), c_t precisa satisfazer:

$$c_t = f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t \quad (2.5)$$

Essa equação restringe as escolhas factíveis de consumo ao longo do tempo.

Para maximizar $c_{t,}$ a economia precisa, no período t, consumir todo o produto corrente $f(k_t)$ mais o capital não depreciado $(1-\delta)k_t$ e $k_{t+1} = 0$.

O nível máximo de consumo é que sustentável no longo prazo pode ser derivado ao impor uma condição de estado estacionário na equação (2.5).

O estado estacionário (ou o "longo prazo") é uma situação em que todas as variáveis *per capita* são as mesmas (isto é, são constantes) em todos os períodos subsequentes, isto é, $c_t = c^*$ e $k_t = k_{t+1} = k^*, t = 1, 2, ...$

Em outras palavras, o estado estacionário é uma situação onde todas as variáveis são constantes ao longo do tempo.

Regra de Ouro – Estado Estacionário

No longo prazo, o estoque de capital será constante, e o consumo de longo prazo é obtido da equação (2.5) como:

$$c^* = f(k^*) - k^* + (1-\delta)k^* \Rightarrow$$

$$c^* = f(k^*) - k^* + k^* - \delta k^* \Rightarrow c^* = f(k^*) - \delta k^* \ (2.6)$$

Portanto, no longo prazo o consumo é o produto menos a parcela do produto exigida para substituir capital depreciado a fim de manter o estoque de capital constante.

Equilíbrio de longo prazo

No longo prazo, o consumo que mantém o estoque de capital constante é dado por: $c^* = f(k^*) - \delta k^*$ (2.6)

Se "amanhã", a variação do estoque de capital é zero, então $\Delta k_{t+1} = i_t - \delta k_t \Rightarrow \Delta k_{t+1} = 0 \Rightarrow i_t = \delta k_t$

A equação (2.6) implica que a variação do capital (ou investimento líquido) será zero, isto é, o único investimento realizado é aquele que substitui o capital depreciado, facilitando um estoque de capital constante ao longo do tempo.

Questionamentos

O que a família representativa precisará escolher para equilibrar a economia?

Como a família representativa irá maximizar o consumo "amanhã"?

Como se deve escolher de maneira ótima o consumo?

Qual é o valor de k^* que maximiza o consumo?

Em resumo

Visando encontrar a solução da regra de ouro, deve-se resolver o seguinte problema de maximização:

$$\max_{k^*} c^* = F(k^*) - \delta k^*.$$

C.P.O.:

$$\frac{\partial c^*}{\partial k^*} = F'(k^*) - \delta = 0$$

$$\frac{\partial^2 c^*}{\partial (k^*)^2} = F''(k^*) \leqslant 0.$$

Regra de Ouro – Estado Estacionário

O problema é escolher *k* para maximizar *c*. O estoque de capital da regra de ouro está implicitamente caracterizado pelas Condições de Primeira Ordem (CPO):

$$\frac{\partial c}{\partial k^*} = f'(k^*) - \delta = 0 \Rightarrow f'(k^*) = \delta \quad (2.7)$$

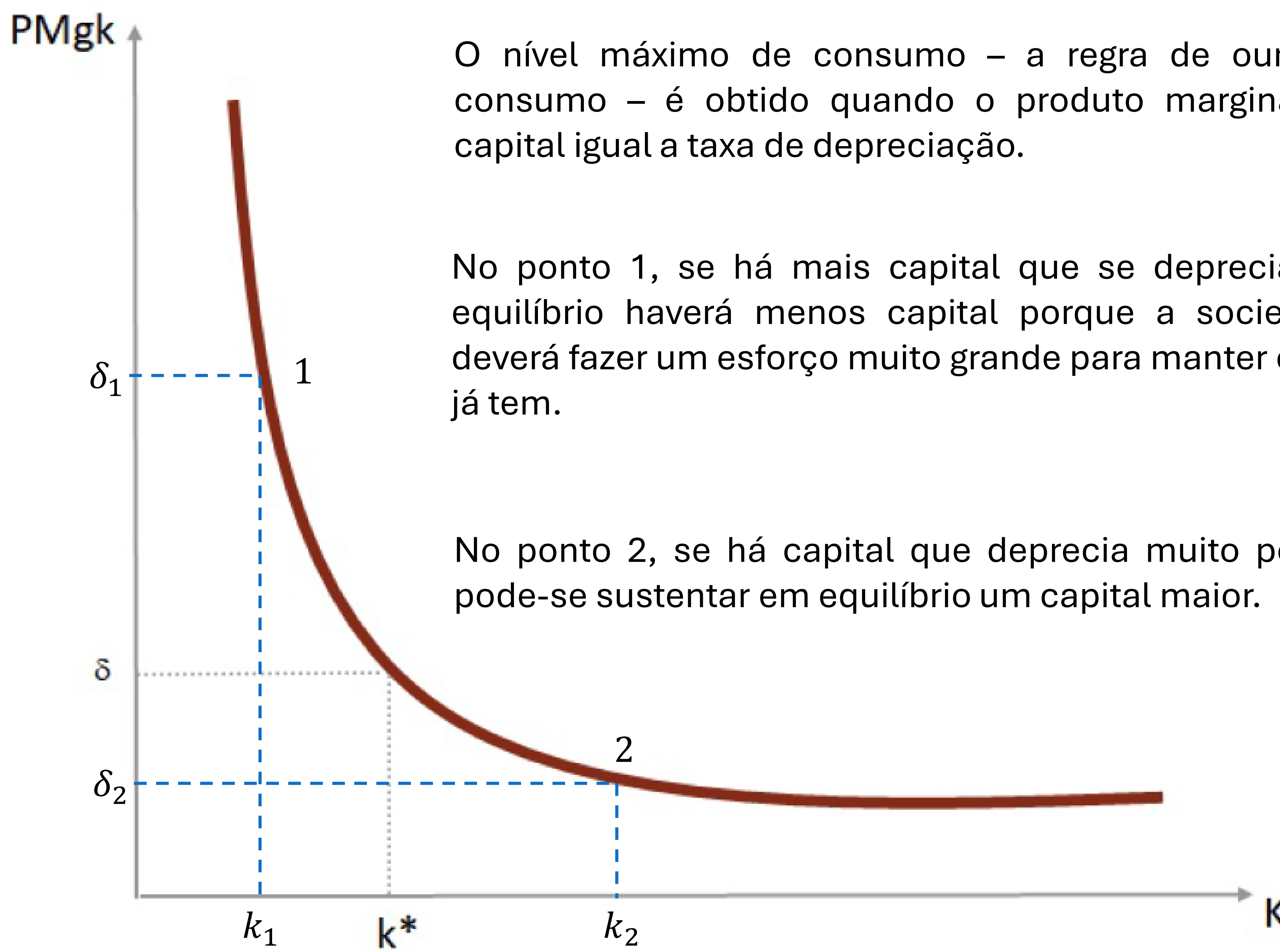
Isso significa que a **produtividade marginal do capital é igual à taxa de depreciação** quando o consumo é maximizado no estado estacionário.

Trata-se da hipótese de unicidade: o k^* que resolve $f'(k^*) = \delta$ é único e o nível de consumo associado c^* é dado por: $c^* = f(k^*) - \delta k^*$

Condições de Segunda Ordem (CSO) asseguram que k^* é um ponto de máximo (e não um ponto de mínimo) :

$$\frac{\partial^2 c}{\partial {k^*}^2} = f''(k^*) \leq 0$$

Regra de Ouro – Estado Estacionário



O nível máximo de consumo – a regra de ouro do consumo – é obtido quando o produto marginal do capital igual a taxa de depreciação.

No ponto 1, se há mais capital que se deprecia, no equilíbrio haverá menos capital porque a sociedade deverá fazer um esforço muito grande para manter o que já tem.

No ponto 2, se há capital que deprecia muito pouco, pode-se sustentar em equilíbrio um capital maior.

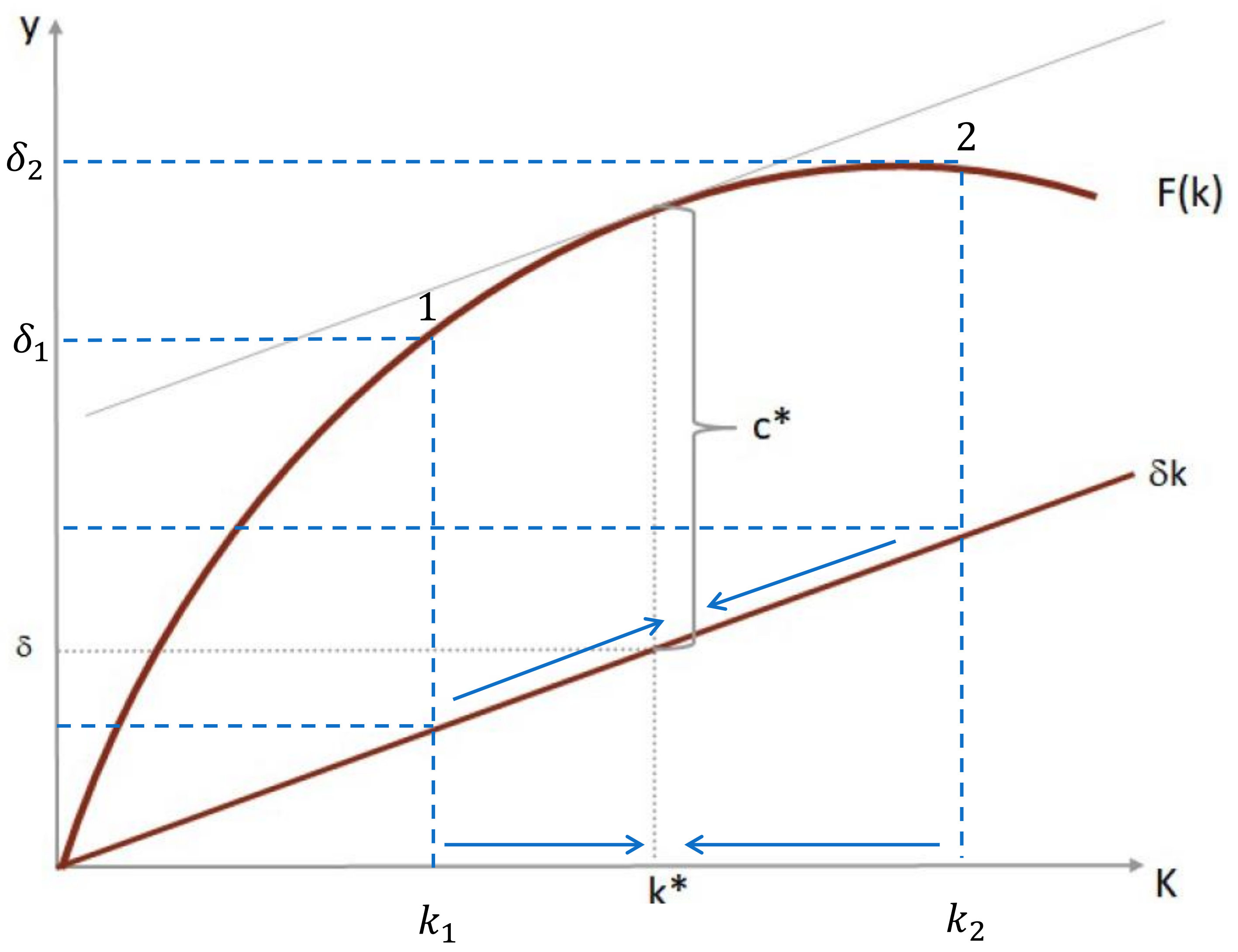
A Dinâmica da Regra de Ouro

Não há distúrbios (choques) na economia: como o estoque de capital é constante, c* é sustentável indefinidamente.

Há distúrbios (choques) na economia: a economia se torna dinamicamente instável em {c*, k*}.

O que ocorreria se a economia tentasse manter o consumo em seu nível máximo c* mesmo quando o estoque de capital se diferencie de k* devido à existência de distúrbios?

Regra de Ouro – Estado Estacionário



Regra de Ouro – Estado Estacionário

Abaixo do ponto $\boldsymbol{k^*}$, consome-se menos do que o nível de consumo da regra de ouro. Mas a depreciação será menor, de modo que o estoque de capital aumenta.

um aumento marginal em k resulta em um aumento em c, uma vez que o ganho marginal da produção, isto é, $f'(k)$ excede o custo de produção de substituição do capital depreciado. Se os agentes ainda quisessem consumir c*, o estoque de capital iria aumentar.

Acima do ponto $\boldsymbol{k^*}$, consome-se mais do que o nível de consumo da regra de ouro. Mas a depreciação será maior, de modo que o estoque de capital diminui. “tem máquina que quebra e não reposta, logo, reduz o capital!”.

Um aumento marginal em k diminuiria c, uma vez que o ganho marginal na produção $f'(k)$ é menor que o custo de produção de substituição do capital depreciado. Se os agentes ainda quisessem consumir c*, o estoque de capital iria diminuir.

Regra de Ouro – Estado Estacionário

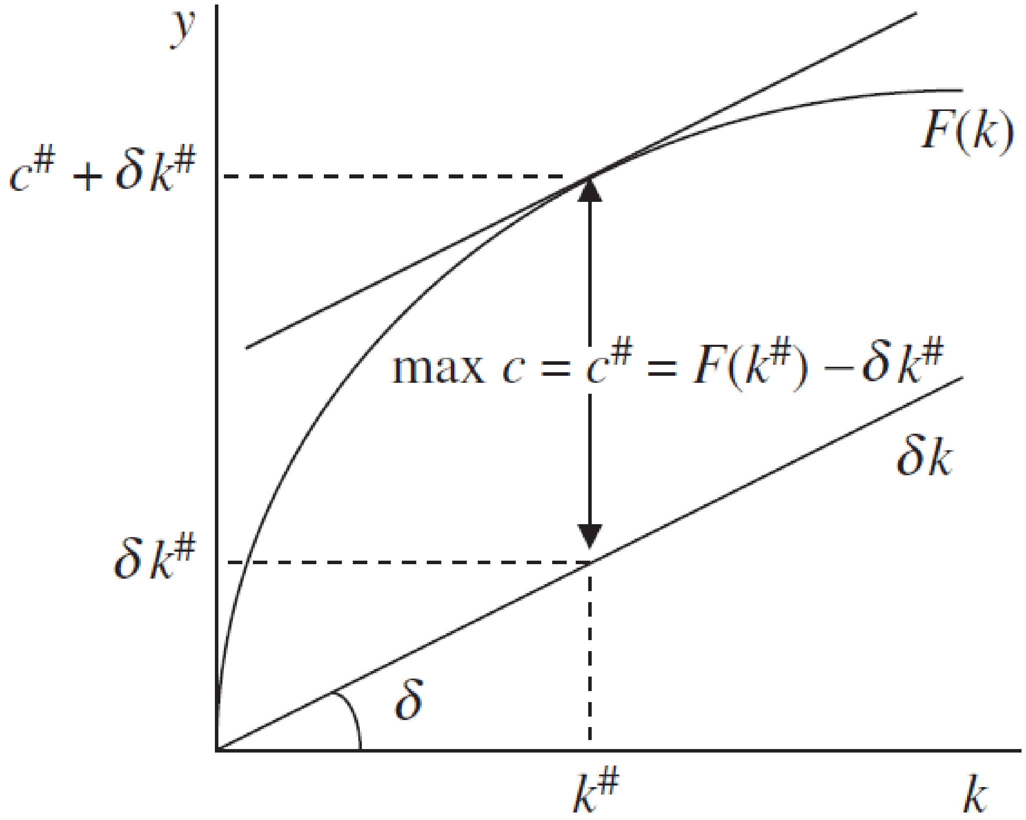


Figure 2.2. Total output, consumption, and replacement investment.

Regra de Ouro – Estado Estacionário

O nível ótimo de consumo pode ser determinado a partir da figura 2.2. A curva representa a função de produção, que expressa o nível de produto produzido pelo estoque de capital k^* .

A linha reta é o investimento δk. A diferença entre as duas linhas é o consumo mais investimento líquido (acumulação de capital):

$$f(k) - \delta k = c + \Delta k$$

Que é a equação (2.5).

A diferença máxima ocorre quando as linhas estão muito afastadas. Isso acontece quando $f'(k) = \delta$, isto é, quando a inclinação da tangente à função de produção [o produto marginal do capital iguala a inclinação da linha de depreciação total, δ].

Regra de Ouro – Estado Estacionário

Considerando a regra de ouro, o nível ótimo do estoque de capital no estado estacionário é aquele nível que maximiza o produto líquido, isto é, o produto líquido da depreciação do capital.

$$y^{net} = f(k_t) - \delta k_t$$

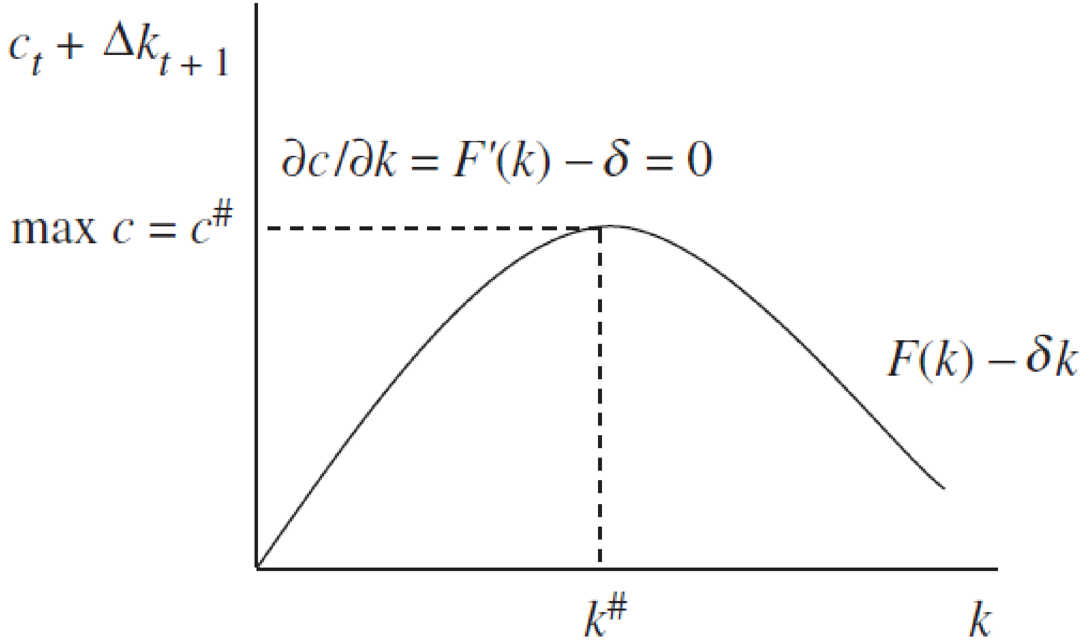


Figure 2.3. Net output.

Regra de Ouro – Estado Estacionário

Na figura 2.3, a curva representa o consumo mais investimento líquido (ou seja, produto líquido ou a distância vertical entre as duas linhas na figura 2.2) e é plotada contra o estoque de capital.

Pontos acima da linha não são atingíveis devido à restrição de recursos $f(k^*) - \delta k^* \geq c + \Delta k^*$

O nível máximo de consumo mais investimento líquido ocorre onde a inclinação da tangente é zero. Neste ponto, o investimento líquido é igual a zero, ou seja: $f'(k^*) - \delta = 0$.

I - Estática Comparativa: aumento em δ

Lembre-se que a condição de otimalidade de primeira ordem $f'(k^*) = \delta$ estabelece somente uma dependência implícita de k^* em δ, isto é, não se pode diferenciar k^* em relação a δ.

No entanto, como esta condição de otimalidade será satisfeita para qualquer valor exógeno δ, podemos escrevê-la como uma identidade:

$$f'\big(k^*(\delta)\big) - \delta \equiv 0 \qquad (2.8)$$

I - Estática Comparativa: aumento em δ

Diferenciando a equação (2.8), tem-se:

$$f''(k^*)\left(\frac{dk^*}{d\delta}\right) - 1 \equiv 0$$

Resultando em:

$$\frac{dk^*}{d\delta} = \frac{1}{f''(k^*)} < 0 \quad (2.9)$$

Interpretação: um aumento em δ torna a acumulação de capital mais custosa, levando a uma queda em k^*.

II - Estática Comparativa: reação de c^* a uma mudança em δ

Para respeitar a dependência implícita de k^*em δ, expresse (2.6) como:

$$c^* = f\big(k^*(\delta)\big) - \delta k^*(\delta)$$

Diferenciando c^* em relação a δ, tem-se:

$$\frac{dc^*}{d\delta} = \frac{d\big[f\big(k^*(\delta)\big) - \delta k^*(\delta)\big]}{d\delta}$$

$$= \underbrace{[f'(k^*) - \delta]}_{=0}\frac{dk^*}{d\delta} - k^*(\delta)$$

$$= -k^*(\delta) < 0$$

<u>Interpretação</u>: um aumento em δ leva também a uma redução em c^*.

Estática Comparativa: comentários finais

Para derivar os resultados de estáticas comparativas a partir de relações implícitas, tais como $f'(k^*) = \delta$, existirão técnicas alternativas.

Em particular, pode-se usar a diferenciação total no equilíbrio para se obter:

$$f'(k^*) \cdot dk = d\delta$$

Essa expressão pode ser rearranjada para confirmar (2.9), isto é:

$$\frac{dk^*}{d\delta} = \frac{1}{f''(k^*)} < 0$$

Considerações finais

A macroeconomia moderna tenta basear a análise em critérios de bem-estar microfundamentados, consistentes com a otimização do comportamento do consumidor representativo.

A análise da regra de ouro incorpora cuidadosamente a restrição dinâmica relacionada à dinâmica do estoque de capital...

... mas não se pronuncia sobre a existência de uma medida de bem-estar individual que geraria a solução da regra de ouro.

Considerações finais

Em particular, a análise da regra de ouro pretende que os indivíduos valorizem o consumo de hoje e o consumo de amanhã da mesma forma.

Mas esta não é uma suposição satisfatória, dada a impaciência observada nas decisões dos consumidores.

Este aspecto é captado pela chamada solução ótima (o que significa que o critério de otimalidade corresponde a um objetivo de bem-estar microfundamentado que incorpora a impaciência).

2. Solução Ótima

O Problema de Otimização

Considere que o período representativo seja denominado por t.

Considere que existe no período inicial $t = 0$ um estoque de capital *per capita* pré-determinado: k_0

Note que V_0 representa o valor presente das utilidades correntes e futuras:

$$V_t = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$$

O consumo adicional aumenta a utilidade instantaneamente $(U_t'(c_t) > 0)$, mas a taxas decrescentes $(U_t''(c_t) \leq 0)$. **Interpretação:** a utilidade futura vale menos que a utilidade corrente.

O Problema de Otimização

$$\lim_{c \to 0+} U_t'(c_t) = \infty$$

$$\lim_{c \to \infty} U_t'(c_t) = 0$$

Assume uma grande quantidade de famílias idênticas e com vida infinita e que tomam todos os preços como dados e têm preferências.

Como as famílias são idênticas em suas preferências, será considerado no modelo uma única família representativa (dinastia).

Solução ótima e 2º teorema do bem-estar

Aqui deriva-se a solução de planejamento central que também pode ser interpretada em termos de uma alocação de equilíbrio competitivo devido **ao segundo teorema fundamental do bem-estar:**

“toda alocação eficiente de Pareto pode ser obtida como um equilíbrio competitivo de mercado”.

O Problema de Otimização

Na solução ótima, o valor presente da utilidade corrente (t) e futura ($t + s$), V_t, é maximizado sujeito à restrição dinâmica estabelecida. Assim, **O planejador central se depara com o seguinte problema de otimização intertemporal**:

$$\underbrace{max}_{\{C_{t+s},k_{t+s}\}} \quad V_t = \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s U(C_{t+s}) \qquad (2.10)$$

$$s.a.\, f(k_{t+s}) = c_{t+s} + k_{t+s+1} - (1-\delta)k_{t+s}$$

Em que $k_t > 0$. O termo $\beta = 1/(1+\theta)$ é o fator de desconto. A utilidade futura é descontada por esse fator constante que satisfaz $0 < \beta < 1$. O termo $\theta > 0$ é a taxa de desconto social ou taxa de desconto temporal.

Condições necessárias

A função objetivo V_t é aditivamente separável, tornando fácil comparar utilidades entre períodos.

Define-se o Lagrangeano restrito para cada período pela restrição de recursos:

$$\mathcal{L}_t = \sum_{s=0}^{\infty} \{\beta^s U(c_{t+s}) + \lambda_{t+s}[F(k_{t+s}) - c_{t+s} - k_{t+s+1} + (1-\delta)k_{t+s}]\}$$

O termo λ_{t+s} é o multiplicador de Lagrange no período $t + s$, isto é, s períodos à frente. O Lagrangeano é maximizado com relação a $\{c_{t+s}, k_{t+s+1}, \lambda_{t+s}; s \geq 0\}$. Condições de Primeira Ordem (CPO):

Condições necessárias

O multiplicador de Lagrange λ_{t+s} mensura o valor sombra de uma unidade adicional de renda no período t (em termos de utilidade no período 0).

O Lagrangeano é maximizado com relação às variáveis de escolha $\{c_{t+s}, k_{t+s+1}, \lambda_{t+s}; s \geq 0\}$.

Condições de Primeira Ordem (CPO):

Condições de Primeira Ordem (CPO)

$$\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial c_{t+s}} = 0 \Rightarrow \beta^s U'(c_{t+s}) - \lambda_{t+s} = 0, \qquad s \geq 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial k_{t+s}} = 0 \Rightarrow \lambda_{t+s}[f'(k_{t+s}) + 1 - \delta] - \lambda_{t+s-1} = 0,\ s > 0 \ \ (2.12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial \lambda_{t+s}} = 0 \Rightarrow f(k_{t+s}) = c_{t+s} + k_{t+s+1} - (1-\delta)k_{t+s}$$

Interpretações das CPO

CPO para o consumo. No nível ótimo, o preço sombra de um aumento no consumo no período *s* marginalmente iguala o ganho de utilidade de um aumento marginal no consumo:

$$\beta^s U'(c_{t+s}) = \lambda_{t+s}$$

Suponha se $\beta^s U'(c_{t+s}) > \lambda_{t+s}$. Nessa situação, valeria a pena para o planejador central aumentar c_{t+s} dado que os bens nesse período são "baratos" em relação à avaliação dos consumidores acerca do consumo desses bens.

Suponha se $\beta^s U'(c_{t+s}) < \lambda_{t+s}$. Nessa situação, não valeria a pena para o planejador central aumentar c_{t+s} dado que os bens nesse período não são "baratos" em relação à avaliação dos consumidores acerca do consumo desses bens.

Interpretações das CPO

CPO para o capital. No nível ótimo, o preço sombra de se aumentar k_{t+s} marginalmente iguala o produto marginal bruto do capital no período $t+s$:

$$\lambda_{t+s}[f'(k_{t+s})+1-\delta]=\lambda_{t+s-1}$$

Suponha que $\lambda_{t+s-1}>\lambda_{t+s}[f'(k_{t+s})+1-\delta]$. Valeria a pena para o planejador central diminuir o k_{t+s} uma vez que o valor descontado apresentado do produto marginal bruto do capital amanhã está abaixo do preço de se aumentar ligeiramente o estoque de capital hoje.

Suponha que $\lambda_{t+s-1}<\lambda_{t+s}[f'(k_{t+s})+1-\delta]$. Não valeria a pena para o planejador central diminuir o k_{t+s} uma vez que o valor descontado apresentado do produto marginal bruto do capital amanhã não estará abaixo do preço de se aumentar ligeiramente o estoque de capital hoje.

Condição de Transversalidade

Como não há incerteza, este é um problema de previsão perfeita. Lembre-se de que quando os agentes otimizam, precisamos impor uma **condição terminal que os impeça de acumular dívidas demais.**

O planejador central enfrenta uma restrição similar, que é a condição de transversalidade:

$$\lim_{s\to\infty} \underbrace{\beta^s U'(c_{t+s})}_{\lambda_{t+s}} k_{t+s+1} = 0 \quad (2.13)$$

Não se maximiza em relação a k_t pois assume-se que o capital é pré-determinado no período t.

Condição de Transversalidade

Suponha que haja um estoque de capital finito no tempo $t + s$. Se consumido, isso daria uma utilidade descontada de $\beta^s U(c_{t+s})k_{t+s}$.

Se o horizonte de tempo fosse $t + s$, então não seria ótimo ter qualquer capital deixado no período $t + s$: ao invés disso, o capital deve ser consumido.

Logo, como $s \to \infty$, a condição de transversalidade fornece uma condição extra de otimalidade para problemas de horizonte infinito intertemporais.

CPO (resumo) e Equação de Euler

Não se maximiza em relação a k_t pois assume-se que o capital é pré-determinado no período t. De (2.11), obtém-se o multiplicador de Lagrange:

$$\lambda_{t+s} = \beta^s U'(c_{t+s})$$

De (2.12), teremos que:

$$\lambda_{t+s}[f'(k_{t+s}) + 1 - \delta] = \lambda_{t+s-1} \quad (2.14)$$

Por analogia, teremos essa outra expressão do multiplicador de Lagrange:

$$\lambda_{t+s-1} = \beta^{s-1} U'(c_{t+s-1})$$

Equação de Euler

Considerando essa nova expressão do multiplicador de Lagrange, combinando as CPO para consumo e capital, nós podemos reescrever a equação (2.14) da seguinte forma:

$$\beta^s U'(c_{t+s})[f'(k_{t+s}) + 1 - \delta] = \beta^{s-1} U'(c_{t+s-1}),\ \ s > 0$$

Para s = 1, a equação acima pode ser reescrita como:

$$\beta^1 U'(c_{t+1})[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta] = \underbrace{\beta^{1-1}}_{=1} U'(c_{t+1-1})$$

Equação de Euler

$$\beta U'(c_{t+1})[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta] = U'(c_t)$$

O lado esquerdo da equação acima é o custo de se aumentar marginalmente o estoque de capital no período $s + 1$ mensurado em termos de perda implícita de utilidade marginal.

O lado direito é o benefício de um estoque de capital marginalmente maior no período $s + 1$: marginalmente, mais capital eleva os recursos no período $s + 1$ por $[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta]$, que é traduzindo em utilidade marginal do consumo $U'(c_t)$.

Equação de Euler

$$\frac{\beta U'(c_{t+1})}{U'(c_t)}[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta] = 1 \quad (2.15)$$

A equação (2.15) é conhecida por **Equação de Euler**. Trata-se da equação dinâmica fundamental em problemas de otimização intertemporal.

Essa equação reflete a substituição intertemporal do consumo entre dois períodos consecutivos.

Equação de Euler

O termo $U'(c_{t+1})/U'(c_t)$ é a inclinação de uma curva de indiferença $\left.\frac{dc_t}{dc_{t+1}}\right|_{dV=0}$, e o seu inverso é a inclinação de uma curva de indiferença $\left.\frac{dc_{t+1}}{dc_t}\right|_{dV=0}$.

Em outras palavras, as expressões acima tratam-se das taxas marginais intertemporais de substituição entre c_t e c_{t+1}.

Assim, no nível ótimo, a taxa marginal de substituição intertemporalé igual ao produto marginal bruto do capital.

Interpretação da Equação de Euler

Considere o seguinte problema: Se reduzirmos c_t em uma pequena quantidade dc_t, quanto maior deve ser c_{t+1} para compensar enquanto deixamos V_t inalterado?

Suponha que o consumo além do período $t + 1$ permanece inalterado. Esse problema pode ser resolvido ao considerar apenas dois períodos: t e $t + 1$.

Considere: $V_t = U(c_t) + \beta U(c_{t+1})$

Interpretação da Equação de Euler

Ao tomar a diferenciação total de V_t, e lembrando-se de que V_t permanece constante, implica que:

$$0 = dV_t = dU_t + \beta dU_{t+1} = U'(c_t)dc_t + \beta U'(c_{t+1})dc_{t+1}.$$

Onde dc_{t+1} representa uma pequena mudança em c_{t+1}, provocada ao se reduzir c_t. Uma vez que se reduz c_t,temos $dc_t < 0$.

A perda de utilidade no período t é definida por: $U'(c_t)dc_t$

A fim de que V_t seja constante, isso será compensado pelo ganho descontado na utilidade $\beta U'(c_{t+1})dc_{t+1}$.

Interpretação da Equação de Euler

Usando o Teorema da Função Implícita, o coeficiente da curva de indiferença no espaço (c_t, c_{t+1}) é denominado taxa marginal de preferência temporal:

$$U'(c_t)dc_t + \beta U'(c_{t+1})dc_{t+1} = 0$$

$$\beta U'(c_{t+1})dc_{t+1} = -U'(c_t)dc_t$$

$$\frac{dc_{t+1}}{dc_t} = -\frac{U'(c_t)}{\beta U'(c_{t+1})} \quad (2.16)$$

Interpretação da Equação de Euler

Logo, é preciso aumentar c_{t+1} por meio de:

$$dc_{t+1} = -\frac{U'(c_t)}{\beta U'(c_{t+1})} dc_t$$

As restrições de recursos para os períodos t e $t+1$ podem ser escritas da seguinte forma:

$$k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t$$

$$c_{t+1} = f(k_{t+1}) - k_{t-2} + (1-\delta)k_{t-1}$$

Interpretação da Equação de Euler

A restrição de recursos precisa ser satisfeita em cada período, nos períodos t e $t + 1$. Usando a regra da cadeia para diferenciar c_{t+1} em relação a c_t, teremos que:

$$F'(k_t)dk_t = dc_t + dk_{t+1} - (1-\delta)dk_t$$

$$F'(k_{t+1})dk_{t+1} = dc_{t+1} + dk_{t+2} - (1-\delta)dk_{t+1}$$

Como k_t é dado, e além do período $t + 1$ estamos restringindo o estoque de capital a permanecer inalterado, somente o estoque de capital no período $t + 1$ pode ser diferente de antes. Logo, $dk_t = dk_{t+2} = 0$.

Interpretação da Equação de Euler

As restrições de recursos para os períodos t e $t + 1$ podem ser reescritas da seguinte forma:

$$0 = dc_t + dk_{t+1}$$

$$F'(k_{t+1})dk_{t+1} = dc_{t+1} - (1 - \delta)dk_{t+1}$$

Essas duas equações podem ser reduzidas a uma equação ao eliminar dk_{t+1} para dar uma segunda conexão entre dc_t e dc_{t+1}:

Interpretação da Equação de Euler

$$0 = dc_t + dk_{t+1} \Rightarrow dk_{t+1} = -dc_t$$

$$F'(k_{t+1})dk_{t+1} = dc_{t+1} - (1-\delta)dk_{t+1} \Rightarrow$$
$$F'(k_{t+1})dk_{t+1} + (1-\delta)dk_{t+1} = dc_{t+1} \Rightarrow$$
$$[F'(k_{t+1}) + (1-\delta)]dk_{t+1} = dc_{t+1} \Rightarrow$$
$$dk_{t+1} = \frac{dc_{t+1}}{[F'(k_{t+1}) + (1-\delta)]}$$

Igualando as duas expressões acima, teremos:

Interpretação da Equação de Euler

$$-dc_t = \frac{dc_{t+1}}{[f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]} \Rightarrow$$

$$dc_{t+1} = -[f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]dc_t \quad (2.17)$$

Interpretação: o consumo não consumido no período t é investido e eleva o produto no período t + 1 por meio de $-f'(k_{t+1})dc_t$. Tudo será consumido no período t + 1.

Como não se deseja aumentar o estoque de capital além do período t + 1, o aumento não depreciado no estoque de capital, $(1-\delta)dc_t$, pode também ser consumido no período t + 1.

Interpretação da Equação de Euler

Isso fornece o aumento total no consumo no período $t + 1$ indicado na equação (2.17). A utilidade descontada desse consumo extra medido no período t é:

$$\beta U'(c_{t+1}) \Rightarrow -\beta U'(c_{t+1}) \underbrace{[f'(k_{t+1}) + (1 - \delta)]dc_t}_{dc_{t+1}}$$

Para manter V_t constante, isso precisa ser igual à perda de utilidade no período t. Logo:

$$U'(c_t)dc_t = \beta U'(c_{t+1})[F'(k_{t+1}) + (1 - \delta)]dc_t$$

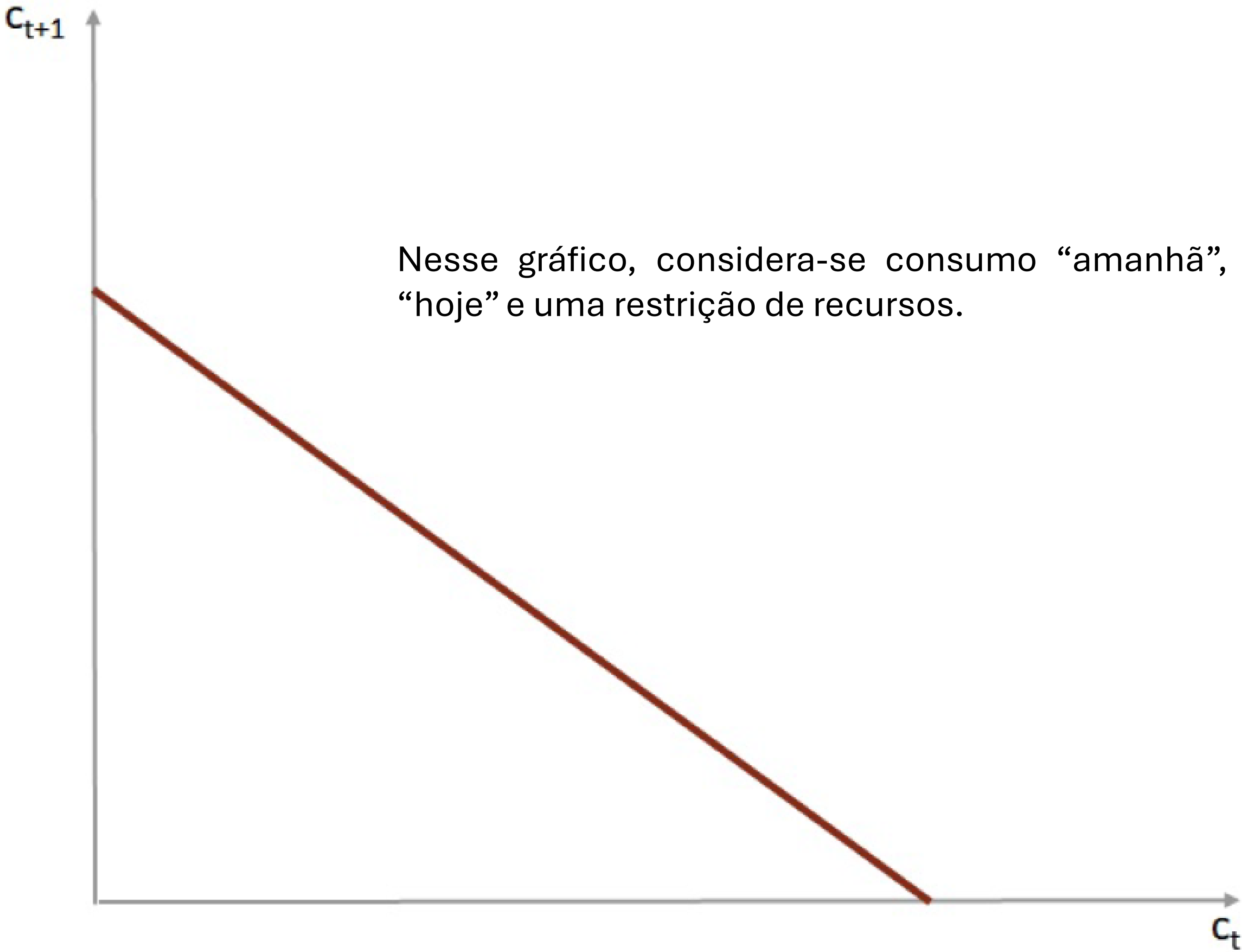
Interpretação da Equação de Euler

Cancelando dc_t em ambos os lados, e dividindo por $U'(c_t)$, nós teremos novamente a equação de Euler (2.15):

$$\Rightarrow \frac{U'(c_t)}{U'(c_t)} = \frac{\beta U'(c_{t+1})[F'(k_{t+1}) + (1-\delta)]}{U'(c_t)}$$

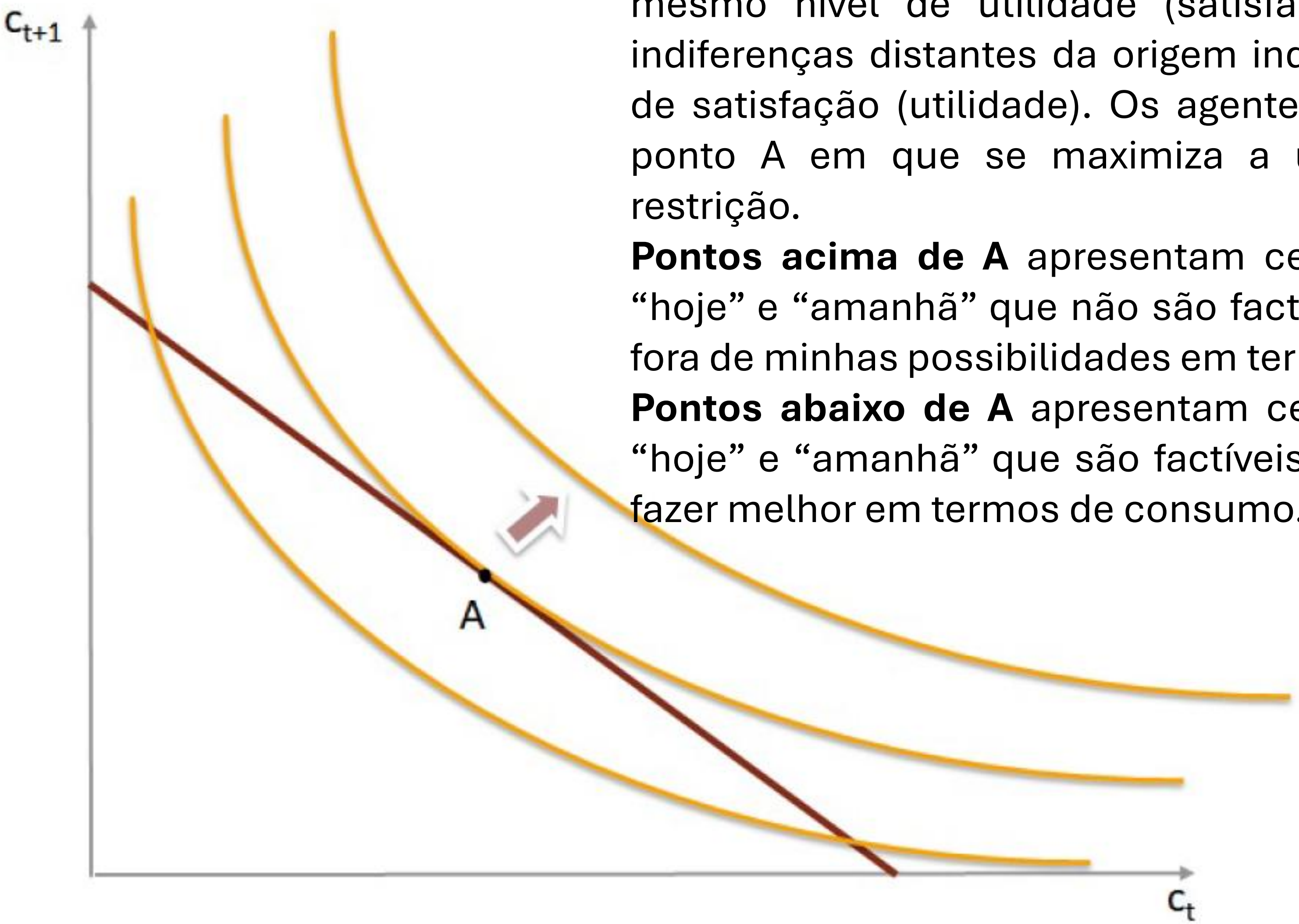
$$\Rightarrow 1 = \beta\left(\frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)}\right)[F'(k_{t+1}) + (1-\delta)]$$

Interpretação da Equação de Euler



Nesse gráfico, considera-se consumo “amanhã”, consumo “hoje” e uma restrição de recursos.

Interpretação da Equação de Euler



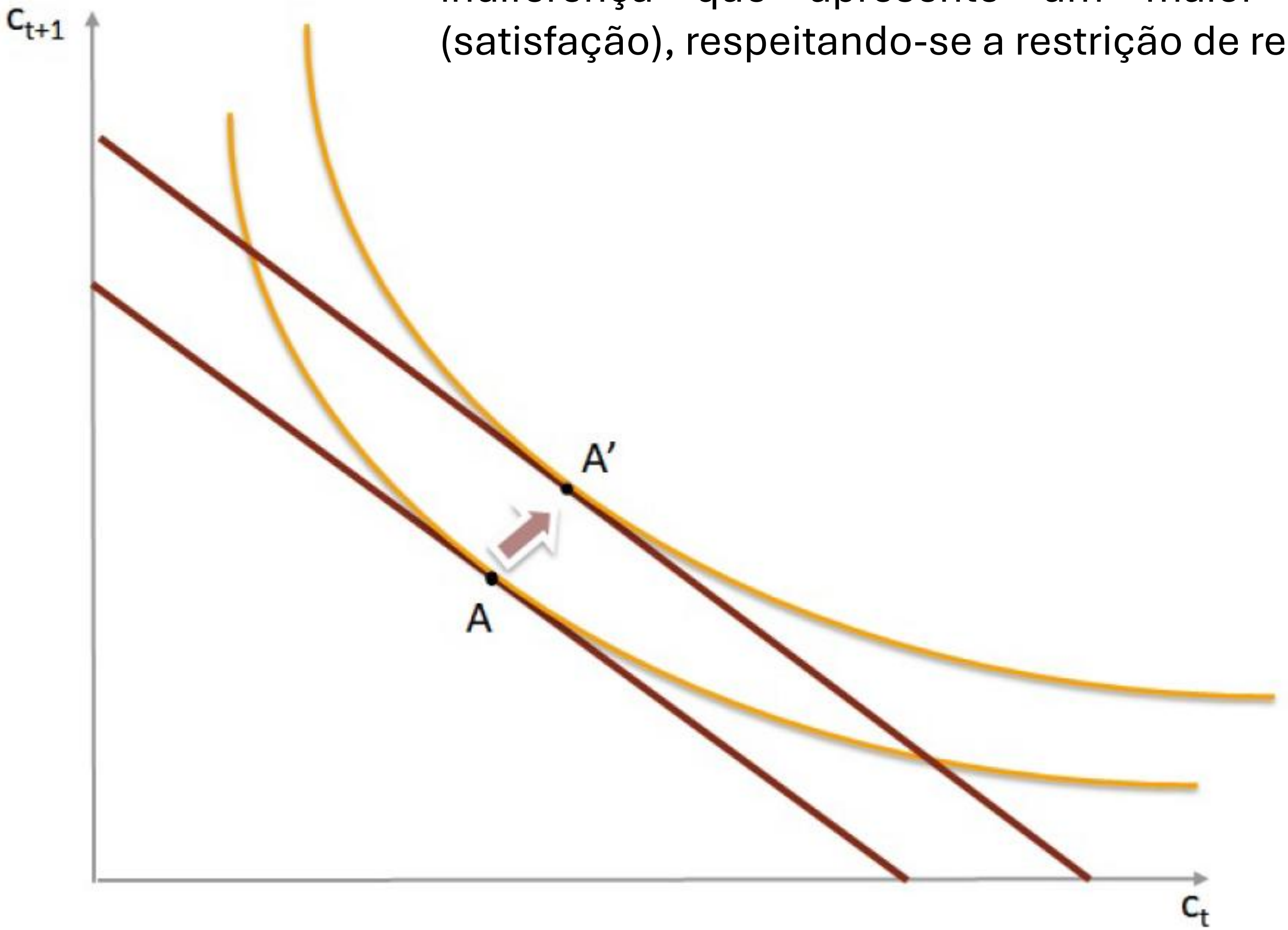
Preferências representadas pelas curvas de indiferenças, que refletem diferentes combinações de consumo hoje e consumo amanhã que me dão o mesmo nível de utilidade (satisfação). Curvas de indiferenças distantes da origem indicam maior nível de satisfação (utilidade). Os agentes irão escolher o ponto A em que se maximiza a utilidade dada a restrição.

Pontos acima de A apresentam cesta de consumo "hoje" e "amanhã" que não são factíveis por estarem fora de minhas possibilidades em termos de recursos.

Pontos abaixo de A apresentam cesta de consumo "hoje" e "amanhã" que são factíveis, mas poderia se fazer melhor em termos de consumo.

Equação de Euler: aumento de dotações

Caso se aumente a restrição de recursos (por exemplo, há um ganho de produtividade que permita aumentar o consumo amanhã e hoje), desloca-se a restrição para uma nova curva de indiferença que apresente um maior nível de utilidade (satisfação), respeitando-se a restrição de recursos.

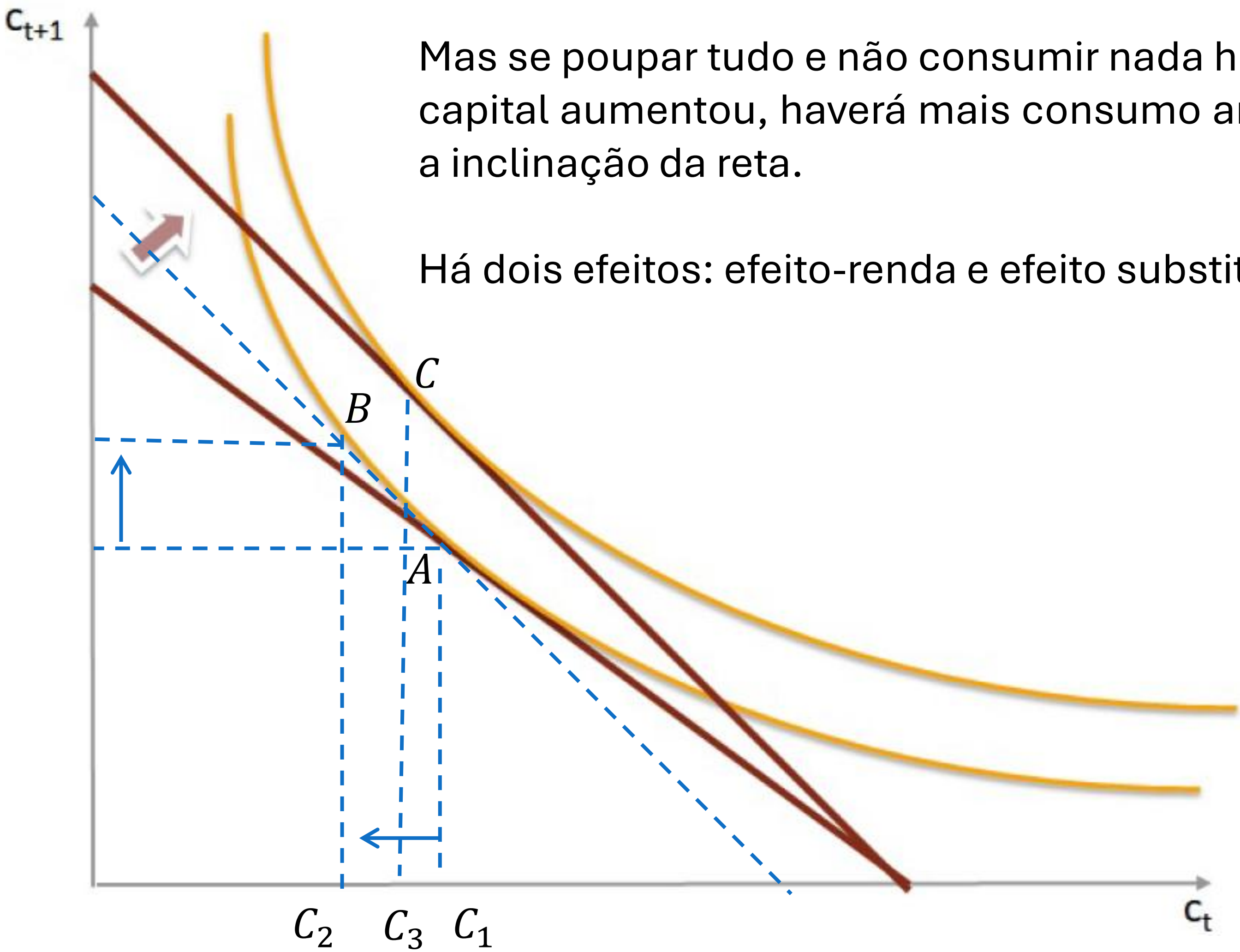


Equação de Euler: aumento da taxa de juros

Poupança hoje significa ausência de consumo hoje e existência de consumo amanhã.

Mas se poupar tudo e não consumir nada hoje, como o retorno do capital aumentou, haverá mais consumo amanhã, logo, muda-se a inclinação da reta.

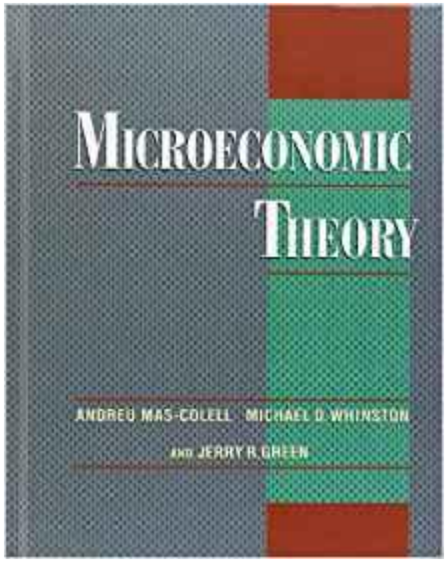
Há dois efeitos: efeito-renda e efeito substituição.



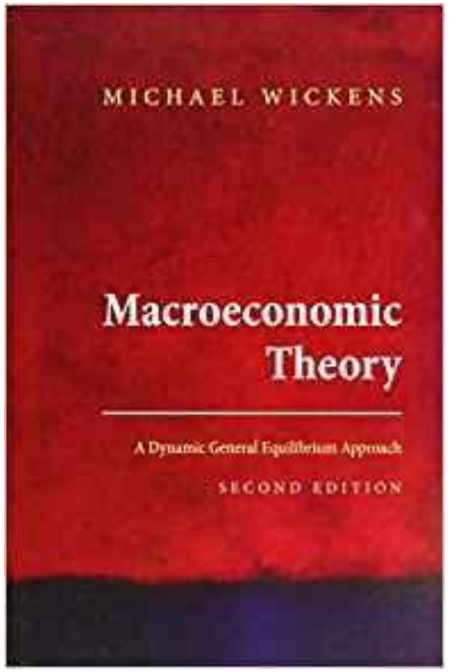
Equação de Euler: aumento da taxa de juros

- **Efeito substituição**: Ponto A $\rightarrow$ Ponto B (troco consumo hoje por consumo amanhã).
- **Efeito renda**: Ponto B $\rightarrow$ Ponto C (maior juro, maior consumo amanhã, posso não consumir "tanto assim" amanhã).

Referência bibliográfica



Capítulo 10



Capítulo 2

Obrigado!

Contato:
____

SÉRGIO RICARDO DE BRITO GADELHA

E-mail: sergio.gadelha@idp.edu.br